ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

А.С.Сорокин

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЗЕРВИРОВАНИЯ ШАХТНЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ КРИТЕРИЯ НАДЕЖНОСТИ

Экономическую эффективность функционирования системы, состоящей из N подсистем, соединенных последовательно, и m_i параллельных элементов в каждой подсистеме (рис.1) можно выразить через прибыль D'', получаемую с учетом надежности входящих в систему элементов, и приведенные затраты C_i на эксплуатацию i-го элемента [1]:

$$D'' = D\overline{P}_C(Э) - B\overline{P}_C(Э) - \sum_{i=1}^{N} C_i m_i \qquad (1)$$

где D - прибыль при отсутствии простоев, руб./год;

$\overline{P}_C(Э)$ - вероятность вынужденного (аварийного) простоя системы;

$B\cdot\overline{P}_C(Э)$ - убыток при простоях из-за отказов системы, руб. / год;

$\sum_{i=1}^{N} C_i m_i$ – приведенные затраты на эксплуатацию системы, руб. / год;

$P_C(Э)$ - вероятность исправного состояния системы.

Величина $P_C(Э)$ связана с вероятностью исправного состояния i-го элемента соотношением

$$P_C(Э) = \prod_{i=1}^{N}\left[1 - \left(1 - P_i(Э)\right)^{m_i}\right]$$

и с вероятностью вынужденного (аварийного) простоя уравнениями

$$P_i(Э) = 1 - \overline{P}_i(Э), \qquad P_C(Э) = 1 - \overline{P}_C(Э);$$

при экспоненциальных законах распределений времени безотказной работы и времени восстановления

$$\overline{P}(Э) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu},$$

где λ - интенсивность отказов (средняя), 1/ч.,

μ - интенсивность восстановления (средняя), 1/ч.

Формула (1) выражает совокупность условий, при которых надежность системы, влияющая на работу предприятия или части его, может быть выражена с помощью экономических критериев.

При введении резервных элементов в i-ю подсистему увеличиваются годовые эксплуатационные затраты, но в тоже время увеличивается вероятность исправного состояния системы $P_C(Э$ и уменьшается вероятность аварийного простоя $\overline{P}_C(Э)$.

Это ведет к возрастанию экономической эффективности функционирования (прибыли) обслуживаемой системы.

С помощью равенства (1) можно выбрать оптимальную по экономичности и надежности систему, если воспользоваться для этой цели, например, принципом максимума Л.С. Понтрягина [2,3], позволяющим решать задачи при наличии ограничения на управления и при любых связях между переменными. Однако принцип максимума в той формулировке, которая была получена для непрерывных процессов, к дискретным процессам, а таковым является рассматриваемый нами, не применим [3,4].

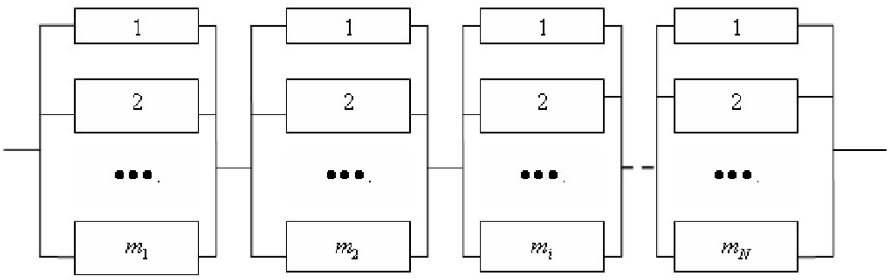

Рис. 1. Блок-схема системы, состоящей из N подсистем, соединенных последовательно, и m_i параллельных элементов в каждой подсистеме.

Рассмотрим основные соотношения принципа максимума для дискретного многостадийного процесса [5]. Представим функционирование системы в виде простого многоступенчатого процесса с последовательным соединением всех N ступеней, а i-я ступень соответствует подсистеме с m_i параллельно соединенными элементами (рис. 1). Процесс, течение которого определяется t-мерным вектором состояния

$$x = \left(x^1, x^2, \ldots, x^t\right),$$

переходит в последующую ступень под воздействием r-мерного вектора управления

$$m = \left(m^1, m^2, \ldots, m^r\right).$$

Математическое описание дискретного многостадийного процесса на i-й ступени (подсистемы) задано в виде системы уравнений

$$x_i^k = w_i^k\left[x_{i-1}^1, x_{i-1}^2, \ldots, x_{i-1}^t; m_i^1, m_i^2, \ldots, m_i^r\right],$$

$$k=1,..,t\,,\quad i=1,..,N$$

или в векторной форме

$$x_i = w_i\left[x_{i-1}; m_i\right], \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \qquad (2)$$

где w_i — оператор преобразования. Предполагается, что исходное состояние

$$x_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^t\right) \qquad (3)$$

задано.

На управляющие переменные наложены ограничения

$$m_i \in M, \qquad i = 1, \ldots, N, \qquad (4)$$

где M-заданное множество.

Требуется для заданного начального состояния (3) найти управление m_i, $i=1,..,N$, которое удовлетворяет ограничениям (4) и придает максимальное значение целевой функции

$$S=f(x_N) \qquad (5)$$

. Предполагается, что $w_i(x,m)$ и $F(x)$ дифференцируемы по совокупности x и m, а множество M - ограниченное и замкнутое.

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что критерий оптимальности задач представим в виде линейной функции переменных состояния последней стадии процесса

$$S = \sum_{k=1}^{t} A_k x_N^k. \qquad (6)$$

С целью оптимизации процесса на основе принципа максимума введем t-мерный сопряженный вектор и функцию Гамильтона H_i

$$H_i = \sum_{k=1}^{t} z_i^k w_i^k\left(x_{i-1}, m_i\right),\ i=1,..,N \qquad (7)$$

сопряженной системы

$$z_{i-1}^k = \frac{\partial H_i}{\partial x_{i-1}^k}\,,\ k=1,..,t\,,\quad i=1,..,N \qquad (8)$$

и граничным условиям

$$z_N^k = \frac{\partial F(x_N)}{\partial x_N^k},\ k=1,..,t \qquad (9)$$

Из уравнений (5), (6) и (9) следует, что

$$z_N^k = A_k\ ,\ k=1,..,t\ .$$

В дальнейшем будем считать, что управляющие переменные есть целые числа, удовлетворяющие ограничениям

$$m_{i,min}^j \le m_i^j \le m_{i,max}^j,\ j=1,..,r,\ i=1,..,N \qquad (10)$$

Определим допустимую вариацию оптимального управления выражением

$$\delta m_i^j = m_i^j - m_{i,опт}^j. \qquad (11)$$

Тогда при сделанных предположениях из теоремы I ([4], с. 169) следует, что если оптимальные значения управляющих воздействий находятся внутри допустимой области ограничений (11), то выполняются условия

$$\frac{\partial H}{\partial m} = 0\ ,\ j=1,..,r,\ i=1,..,N, \qquad (12)$$

а в случае, тогда оптимальные значения управлений попадает на границу ограничения (9), тогда

$$\frac{\partial H}{\partial m}\delta m_i^j \le 0\ ,\ j=1,..,r,\ i=1,..,N. \qquad (13)$$

Рассмотрим случай, когда ущерб от ненадежности формируется за счет снижения размера прибыли. Тогда уравнение (1) примет вид

$$D'' = DP_C\left(Э\right) - \sum_{i=1}^{N} C_i m_i. \qquad (14)$$

Для максимизации величины прибыли D'' представим каждую подсистему (рис. 1), имеющую параллельные элементы, в виде ступени рассматриваемого процесса.

Введем обозначения для i-й ступени:

$x_i^1 = P\left(Э\right)$ – показатель надежности ;

$x_i^2 = d_i$ – увеличение эксплуатационных затрат ;

m_i-1 - число резервных элементов .

В силу принятых обозначений считаем, что в формулах (2 - 13) величины $r=1$ и $t=2$.

Пусть

$$\overline{P}_i\left(Э\right) = 1 - P_i\left(Э\right);\ i=1,..,N,\ \ m_i^1 = m_i.$$

Многостадийный процесс в этом случае описывается системой уравнений:

$$x_i^1 = x_{i-1}^1\left[1 - \left(\overline{P}_i\left(Э\right)\right)^{m_i}\right], \qquad i = 1, \ldots, N; \qquad (15)$$

$$x_i^2 = x_{i-1}^2 + C_i m_i, \qquad i = 1, \ldots, N. \qquad (16)$$

Исходное состояние определяется следующим образом:

$$x_0^1 = 1, \qquad x_0^2 = 0. \qquad (17)$$

Из системы (15) с учетом (17) получаем

$$x_j^1 = \prod_{i=1}^{j}\left[1 - \left(\overline{P}_i\left(Э\right)\right)^{m_i}\right], \qquad j = 1, \ldots, N. \qquad (18)$$

Аналогично, из (16) и (17) имеем

$$x_j^2 = \sum_{i=1}^{j} C_i m_i, \qquad i = 1,\ldots,N. \qquad (19)$$

Из формул (18) и (19) видно, что компоненты вектора состояния i -ой ступени являются функциями только управлявших воздействий

$$m_i\,, \quad i=1,..,j.$$

Целевая функция, максимум которой отыскивается с помощью формул (6), (14), (18), (12), может быть представлена в виде

$$S = \sum_{k=1}^{2} A_k x_N^k - DP_C(Э) - \sum_{i=1}^{N} C_i m_i,$$

где $A_1=D$, $A_2=-1$.

Функция Гамильтона имеет вид

$$H_i = z_i^1 x_{i-1}^1 \left[1 - \left(\overline{P}_i(Э)\right)^{m_i}\right] + z_i^2\left(x_{i-1}^2 + C_i m_i\right), \quad i=1,..,N \qquad (20)$$

Сопряженная система в этом случае принимает вид

$$\begin{cases} z_{i-1}^1 = z_i^1\left[1 - \left(\overline{P}_i(Э)\right)^{m_i}\right], \\ z_{i-1}^2 = z_i^2, \qquad i = 1,\ldots,N, \end{cases} \qquad (21)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} z_N^1 = D, \\ z_N^2 = 1. \end{cases} \qquad (22)$$

Система (21) с учетом граничных условий (22) разрешима в замкнутой форме, величины z_i^k являются функциями только управляющих воздействий. Из формул (21) и (22) получаем

$$z_i^1 = D\prod_{j=i+1}^{N}\left[1 - \left(\overline{P}_j(Э)\right)^{m_j}\right], \qquad j = 0,1,\ldots,N; \qquad (23)$$

$$z_i^2 = -1, \qquad i = 0,1,\ldots,N. \qquad (24)$$

Преобразовав (20) с помощью (23), (24), (18) и (19), получим

$$\frac{\partial H}{\partial m} = D\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} [1 - \overline{P}_j(Э)^m](-1)(\overline{P}_i(Э))^{m_i} \times \times ln(\overline{P}_i(Э)) - C_i \qquad (25)$$

Соотношение (25) получено для уравнения (14). Если ущерб при отказах системы складывается не только за счет понижения прибыли, но за счет повышения удельно-постоянных расходов в себестоимости, то имеем уравнение (1). Для уравнения (1) соотношение (25) принимает вид

$$\frac{\partial H}{\partial m} = -(B + D)(\overline{P}_i(Э))^{m_i}\, ln(\overline{P}_i(Э)) \times \times \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} [1 - \overline{P}_j(Э)^m] - C_i, \qquad (26)$$

$$i=1,..,N,$$

Введем обозначения:

$$b_i = 1 - \left(\overline{P}_i(Э)\right)^{m_i}, \qquad i = 1,\ldots,N; \qquad (27)$$

$$h_i = \frac{C_i}{(B+D)\ln\overline{P}_i(Э)}, \quad i=1,..,N. \qquad (28)$$

В случае если оптимальные значения управляющих воздействия находятся внутри допустимой области ограничений (9), то из формул (12) и (26) с учетом (27) и (28) получаем систему нелинейных уравнений

$$\left(1 - b_j\right)\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} b_i = h_j, \qquad j = 1,\ldots,N \qquad (29)$$

относительно величин b_j. $j=1,..,N$.

Систему (29) можно представить в виде

Таблица 1. Оптимальное резервирование технологической цепи

Номер ступени	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Прибыль D' млн. руб./год
Показатель вынужденного простоя элемента цепи $\overline{P}(Э)10^5$	0.9	0.5	0.9	25	37.1	2	5.5	48.5	165	28	84	
Стоимость цепи c_i	55	50	5	40	100	5	60	80	80	50	40	
Оптимальное число резервных элементов цепи m_i	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	479.855
Некоторые неоптимальные варианты резервирования элементов цепи	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	478.32
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	478.3I
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	476.46
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	475.62

$$b_j = \frac{\tau}{\tau + h_i}. \quad j=1,..,N., \qquad (30)$$

где τ является корнем алгебраического уравнения N- ой ступени

$$\prod_{i=1}^{N} \left(\tau + h_i\right) = \tau^{N-1}. \qquad (31)$$

Из уравнения (31) и положительности h_j, $j=1,..,N$ вытекает грубое неравенство

$0<\tau<1$ /

Более детальное исследование уравнения (31) позволяет получить более точные оценки:

$$\prod_{i=1}^{N} h_i < \tau < 1 - \prod_{i=1}^{N} h_i. \qquad (32)$$

Исключая из (27) и (30) b_i, $i=1,..,N$ и решая полученные соотношения относительно m_i, будем иметь

$$m_i = \frac{\ln h_i - \ln(h_i + \tau)}{\ln \overline{P}_i(Э)}, \quad i=1,..,N \qquad (33)$$

Формула (33) дает явное выражение для оптимальных воздействий. Так как величины m_i могут принимать только целые значения, то удобнее представить приближенное решение с помощью неравенства (32) и формул (33) в виде:

$$-\frac{\ln\left(1+\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} h_j\right)}{\ln \overline{P}_i(Э)} \le m_i \le \frac{\ln h_i - \ln\left(1-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} h_j\right)}{\ln \overline{P}_i(Э)}$$

$i=1,..,N$ (33')

Если оптимальные значения управляющих воздействия попадают на границу ограничения (10), то из выражений (13) и (26) с помощью (27) и (28) получаем систему алгебраических неравенств, которые системой (30) преобразуются к виду

$$\prod_{i=1}^{N} \left(\tau + h_i\right) \le \tau^{N-1} \qquad при \quad \delta m_i < 0; \qquad (34)$$

$$\prod_{i=1}^{N} \left(\tau + h_i\right) \ge \tau^{N-1} \qquad при \quad \delta m_i > 0. \qquad (35)$$

Соотношения (31), (34) и (35) позволяет построить вычислительную схему следующим образом: из всех допустимых целочисленных управляющих воздействий m_i, удовлетворяющих неравенствам (10), найти такие, которые доставляют минимум величине δ, т.е.

$$\delta_i = \underbrace{\min}_{m_i} \left\{ \left\| \prod_{j=1}^{N} \left(\tau_i + h_j\right) - \tau_i^{N-1} \right\| \right\},$$

$$i=1,..,N, \qquad (36)$$

где

$$\tau_i = h_i \left[\left(\overline{P}_i(Э) \right)^{-m_i} - 1 \right]. \qquad (37)$$

В некоторых системах, например в схемах электроснабжения шахт, обычно принимается не более двух параллельных элементов, один из которых является резервным, и поэтому количество вычислительных операций в формулах (36), (37) существенно уменьшается.

В схемах водоснабжения и гидравлического подъёма [6, 7] обычно принимается не более трех параллельных элементов (один резервный), и потому число вычислительных операций в формулах (36), (37) несущественно усложняется.

Предложенный в работе алгоритм реализован на ЭВМ в математическом пакете DERIVE6.10.

На управляющие переменные были наложены ограничения: принималось, что они целочисленные и их не более пяти в каждой ступени системы. Число ступеней системы предполагалось не более 30.

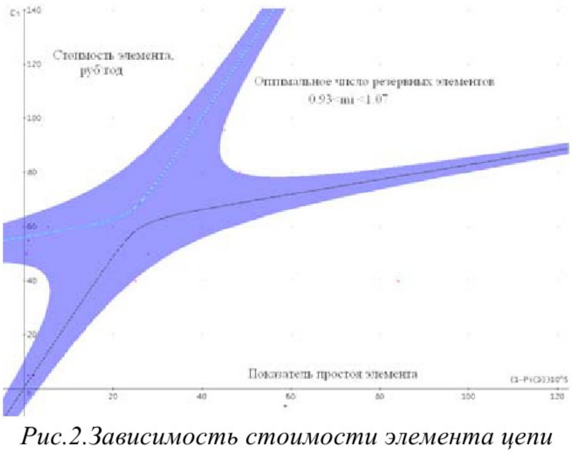

Рис.2.Зависимость стоимости элемента цепи от показателя вынужденного простоя элемента цепи при выполнении двойного неравенства для оптимального числа резервных элементов цепи,
$0.93< m_i < 1.07$

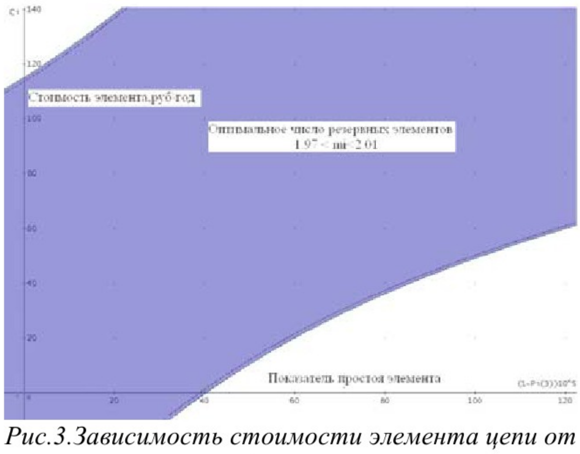

Рис.3.Зависимость стоимости элемента цепи от показателя вынужденного простоя элемента цепи при выполнении двойного неравенства для оптимального числа резервных элементов цепи,
$1.97< m_i < 2.01$

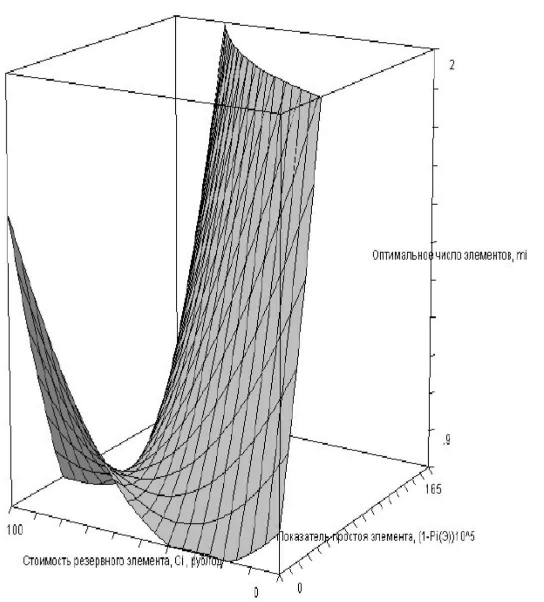

Рис.4.Зависимость стоимости элемента цепи от показателя вынужденного простоя элемента цепи и от оптимального числа резервных элементов цепи

Для исходных данных (табл. 1), при условии, что прибыль при отсутствии простоев D = 480 млн. руб. /год и убыток при простоях из-за отказов системы B=648 млн. руб./год, получено оптимальное число резервных элементов на каждой ступени технологической цепи. В табл. 1 приведены и некоторые неоптимальные варианты резервирования. В последнем столбце указана прибыль для соответствующих вариантов.

На рис.2 дана зависимость стоимости элемента цепи от показателя вынужденного его простоя для оптимального числа резервных элементов цепи и условии $0.93< m_i < 1.07$, где

$$m_i = (1\text{-}P_i(Э))^2\cdot 10^6+(1\text{-}P_i(Э))(2\cdot 10^3\text{-}40C_i)+ +15\cdot 10^{-5}(C_i)^2\text{-}\ 8\cdot 10^{-3}\ C_i+1.003\ .$$

На рис.3 представлена зависимость стоимости элемента цепи от показателя вынужденного простоя элемента цепи при других ограничениях на оптимальное число резервных элементов цепи $1.97< m_i < 2.01$.

На рис.4 представлена зависимость стоимости элемента цепи от показателя вынужденного простоя элемента цепи и от оптимального числа резервных элементов цепи.

Разработанный метод выбора оптимального резервирования можно использовать при расчетах на надежность любых систем, где необходим учет влияния надежности на экономичность.

Выводы

1. Установлено, что возрастание экономической эффективности функционирования (прибыли) обслуживаемой системы возможно при введении резервных элементов в i-ую подсистему. Наряду с увеличением годовых эксплуатационных затрат увеличивается вероятность исправного состояния системы и уменьшается вероятность аварийного простоя.

2. Разработанный метод выбора оптимального резервирования может быть использован при расчетах на надежность любых систем, где необходимо учесть влияние надежности на экономичность.

3. Разработанная модель позволяет оптимизировать кратность резервирования оборудования технологических блоков водоснабжения, электроснабжения и гидроподъёма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сорокин А.С., Разгильдеев Г.И., Сорокина М.К.* Метод оптимизации шахтных технологических систем по критерию надежности и метановзрывоопасности //Труды ВНИИГидроугля, вып. 34, Новокузнецк, 1974, с. 17 –32.

2. *Сорокин А.С., Разгильдеев Г.И.* Оптимизация резервирования шахтных технологических систем с использованием принципа максимума //Труды ВНИИГидроугля, вып.36, Новокузнецк, 1976, с. 127–138.

3.*Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.З., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., 1961. - 391с.

4. *Пропой А.И.* Условия оптимальности для дискретных процессов. (В кн.: *Фан Лянь – Цэнь, Вань Чу – Сен.* Дискретный принцип максимума. М., 1967, с. 168 – 176.

5. *Чуев Ю.В., Спехова Г.П.* Технические задачи исследования операций. М., 1971. – 223 с.

6. *Сорокин А.С.* О выборе оптимальных параметров транспортирования и оборудования при гидротранспорте. // Вестн. Кузбасского гос. тех. унив., № 3 (53). Кемерово, 2006,с. 76 – 83.

7. *Сорокин А.С.* Выбор оборудования и схем углесосных станций// Вестн. Кузбасского гос. тех. унив., № 1 (51). Кемерово, 2006,с. 34 -36 .

□ Автор статьи:

Сорокин
Андрей Семенович
- канд. физ.-мат.наук, доцент, ст.н.с.
(филиал КузГТУ , г. Новокузнецк)
Тел.8-3843-772459