

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.21+519.876.5

А.С.Сорокин

МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ЦИКЛИЧЕСКИМ ОПРОСОМ

1. Системы массового обслуживания мультисервер - мультиочереди (MSMQ).

Рассмотрим различные особенности нескольких систем MSMQ моделей PEPA. Для простоты представления системы, которые рассмотрены в [1-11], являются относительно небольшими, включающими в каждом случае только по три или четыре узла и два сервера. Однако, этого достаточно, чтобы обобщить эти модели на большие системы. В каждом случае рассматривают среднее время ожидания (исключая время обслуживания) клиента в системе. У всех моделей [12-25] есть некоторые особенности, которые рассматриваются в разделе 1.1.

Далее излагается подробная информация о каждой модели, указываются значения параметров, которые были применены, и приводятся один или несколько графиков, показывающих, как изменяется среднее время ожидания в зависимости от изменения условий в данной системе.

1.1 Особенности рассматриваемых систем. Хотя детали особенностей рассматриваемых систем различаются, у них у всех одни и те же компоненты, а именно, узлы и серверы. Для того чтобы представить структуру клиентов в [1-3, 5-10] компонент задан как внешний по отношению

к узлу. Во всех моделях процесс входа представлен *in* деятельностью узла, и предполагается, что процесс входа приостанавливается всякий раз, когда буфер наполнен. Во всех моделях предполагается ограниченное буферизование [2-4]. Таким образом, клиенты продолжают занимать место в буфере до окончания обслуживания. В большинстве случаев у узлов есть только единственное место в буфере.

У всех компонентов узла имеются особые производные, представляющие различные состояния узла, а также характеризующие действия, которые возможно предпринять. Например, единственный буферный узел может только выступать в *in* деятельности, когда он пуст. Узел выступает в деятельности *подачи*, когда сервер присутствует и узел занят.

Три модели симметричны относительно серверов, и две из них симметричны относительно узлов.

Для каждой из моделей вычисляют среднее время ожидания клиента для каждого узла.

Для модели опроса, представленной в [1, раздел 2.2], применен закон о малом числе испытаний в узле.

$$\text{Node}_{j0} \stackrel{\text{def}}{=} (\text{in}, \lambda). \text{Node}_{j1} + (\text{pass}_j, e). \text{Node}_{j0} \quad 1 \leq j \leq N$$

$$\text{Node}_{j1} \stackrel{\text{def}}{=} (\text{engage}_j, e). (\text{serve}_j, \mu). \text{Node}_{j0}$$

$$S_j \stackrel{\text{def}}{=} (\text{walk}, \omega). S_{j1}$$

$$S_{j1} \stackrel{\text{def}}{=} (\text{pass}_j, \perp). S_{j\oplus 1} + (\text{engage}_j, e). (\text{serve}_j, \perp). S_{j\oplus 1},$$

где $j \oplus 1 = 1$ когда $j = N$

где $N = 3$:

$$\text{MSMQ 1} \stackrel{\text{def}}{=} (\text{Node}_{10} \parallel \text{Node}_{20} \parallel \text{Node}_{30})_{(\text{engage}_j, \text{pass}_j, \text{serve}_j)} (S_1 \parallel S_1) \quad \text{где } 1 \leq j \leq N$$

Рис. 1: Модель симметричной системы MSMQ без обгона

Таблица 1: Параметры для моделей MSMQ 1 и Опрос (Poll)

<i>in</i>	<i>serve</i>	<i>walk</i>	<i>pass</i>	<i>engage</i>
λ	μ	w	e	e
0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5	1.0	10	50	50

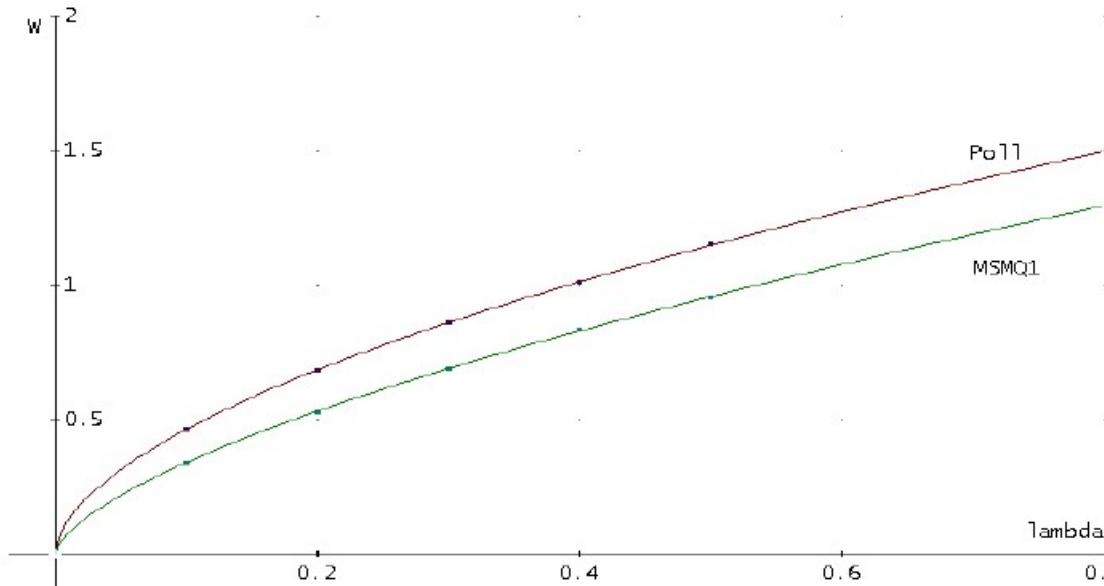


Рис. 2. Зависимость времени ожидания W клиента от оценки λ прибытия клиента, для моделей $MSMQ1$ и Опрос (Poll)

$$\begin{aligned}
 Node_{j0} &\stackrel{\text{def}}{=} (in, \lambda). Node_{j1} + (walk_E_j, \perp). Node_{j0} \quad 1 \leq j \leq N \\
 Node_{j1} &\stackrel{\text{def}}{=} (walk_F_j, \perp). Node_{j2} \\
 Node_{j2} &\stackrel{\text{def}}{=} (serve_j, \mu_j). Node_{j0} + (walk_E_j, \perp). Node_{j2} \\
 \text{где } \mu_j &= \begin{cases} \mu, & \text{если } j = 1, \\ m\mu, & \text{если } 1 < j \leq N, \end{cases} \\
 S_j &\stackrel{\text{def}}{=} (walk_F_j, \omega). (serve_j, \perp). S_{j \oplus 1} + (walk_E_j, \omega). S_{j \oplus 1}, \\
 &\text{где } j \oplus 1 = 1 \text{ когда } j = N \\
 &\text{где } N = 4: \\
 Asym &\stackrel{\text{def}}{=} (Node_{10} \parallel Node_{20} \parallel Node_{30} \parallel Node_{40})_{(walk_F_j, walk_E_j, serve_j)} (S_1 \parallel S_1), \text{ где } 1 \leq j \leq N
 \end{aligned}$$

Рис. 3. Модель асимметричной системы $MSMQ$ на языке PEPA.

Поскольку буферизование ограничено, пропускная способность узла будет пропускной способностью деятельности *подачи*, вычисленной из предположения, что она будет дополнением до полной оценки деятельности. Для единственного буферного узла среднее число N представителей в узле, может быть найдено из предположения, что полная деятельность соответствует 1.

Когда разрешена деятельность *in*, то она вычисляет R_m . Тогда $N = 1 - R_m$. Поскольку найдено среднее число клиентов для двух буферов, то можно найти вероятность того, что узел пуст, или подобным же способом найти вероятность того, что узел занят.

1.2 Система $MSMQ$ с циклическим опросом, без обгона. Сначала рассмотрим симметричную

систему $MSMQ$. В этой системе опрос производится циклически, но так, что серверы друг другу не мешают. Таким образом, сервер, который достигает узла, должен ждать, пока обслуживание не произведено полностью перед переходом к следующему узлу, и после этого найти другой сервер для обслуживания клиента. Эта система может быть классифицирована как $M/M/M/1/Q \times 1/L$ система.

Модель, реализованная на языке PEPA, показана на рис. 1.

S_j обозначает сервер, готовый работать с узлом $Node_j$, S_{j1} обозначает представителя сервера в узле $Node_j$. При достижении узла сервер или *пройдет* (*pass*), если буфер будет незанятым,

Таблица 2: Значения параметров для модели *Asym*

<i>in</i>	<i>serve_j</i> (<i>j</i> = 2,3,4)	<i>serve_j</i> (<i>j</i> = 1)	<i>walk_E</i>	<i>walk_F</i>
λ	μ	$m\mu$	ω	ω
0.1	1	$1 \leq 1/m \leq 5$	10	10

или включается (*engage*), если требуется обслужить клиента. Отметим, что в любой момент времени будет разрешено только одно из этих действий.

Рассматриваемая система имеет три узла. Узлы независимы друг от друга, но для деятельности каждый должен кооперироваться с сервером при любых *pass_j*, *engage_j*, или *serve_j*. Эти два сервера независимы друг от друга, т.е. между ними нет никакой кооперации.

Модель состоит из 444 состояний и 1446 переходов. Значения, заданные параметрам, указаны в табл. 2. Что касается модели опроса, представленной в [1, раздел 2.2], то был исследован эффект от изменения оценки среднего времени ожидания прибытия клиента, и произведено сравнение со средним временем ожидания, полученным для подобной модели опроса:

Так как система симметрична, то особенности характеристик всех узлов будут те же самые. На рис. 2. изображен график, показывающий, как среднее время ожидания увеличивается с увеличением оценки прибытия в каждом узле, как для модели *MSMQ*, так и для модели опроса.

Очевидно, что когда обгон запрещен для системы данного размера, то для второго сервера возникает эффект сокращения среднего времени ожидания клиентов в системе.

Математическая модель зависимости времени ожидания *W* клиента от оценки λ прибытия клиента для модели *MSMQ1*, представленная на рис. 2, будет иметь следующий вид:

$$W = 1.4942\lambda^{0.6432}$$

Математическая модель зависимости времени ожидания *W* клиента от оценки λ прибытия клиента, для модели опроса (POLL), представленная на рис. 2, будет иметь вид:

$$W = 1.69672\lambda^{0.5644}$$

1.3 Асимметричная система *MSMQ* с циклическим опросом. В [14] авторы рассматривают систему узлов *N*, в которых у одного узла есть ёмкость *K* и оценка прибытия *Kλ*, в то время как у всех других узлов есть ёмкость 1 и оценка прибытия λ . Предполагается, что в сети у одного узла есть высокая пропускная способность, а у остальных узлов пропускная способность низкая. Такая как система LAN, объединяющая несколько автоматизированных рабочих мест и один сервер. Было показано, что присутствие более загруженного узла совсем не влияло на среднее время ожидания клиентов в менее загруженных узлах.

$$Poll = \overset{\text{def}}{(Node_{10} \parallel Node_{20} \parallel Node_{30})}_{\{engage_j, pass_j, serve_j\}} S_1$$

Рассмотрим систему *N* узлов, каждый из которых имеет ёмкость 1 и оценку прибытия λ , но с клиентом в одном узле, предъявляющим большее требование к обслуживанию сервера. Опрос является циклическим и обгон разрешен. Система может быть классифицирована как $M/M_i/M/1/Q \times 1/L$. Модель этой системы на языке PEPA показана на рис. 3.

Исследуем эффект большего требования обслуживания в узле *Node₁*, от среднего времени ожидания клиентов в каждом из узлов. Предполагаем, что процесс прибытия в каждый узел определяется законом Пуассона с параметром λ , и что нормальное обслуживание, усиленное обслуживание и времена блуждания в системе распределяются по экспоненте с оценками μ , $m\mu$ и ω соответственно *S_j*, обозначает сервер, готовый обслуживать *j*-ый узел в системе. В этой модели не выделена деятельность, представляющая взаимодействие между сервером и узлом, для того чтобы определять, найдется ли представитель клиента в буфере. Это воздействие включено в категорию действия блуждания, приводящего к двум действиям *walk_E_j* и *walk_F_j*, представляя одно как бесполезное, а другое как успешное блуждание к узлу *Node_j*. Эти действия не могут быть разрешены одновременно.

Отметим, что, поскольку обгон теперь разрешен для занятого узла, который в настоящее время обслуживается, и отвечает второму серверу, что он пустой. Оценка обслуживания определяется узлом и зависит от данного узла. Оценка каждой деятельности блуждания определяется сервером.

Рассматриваемая система состоит из четырех узлов, которые не взаимодействуют друг с другом, и двух серверов, которые так же непосредственно не взаимодействуют. Кооперация узла и сервера необходима для всех блужданий *walk_E* и *walk_F*, и действия *подачи* (*serve*). Значения параметров указаны в табл. 3. Эффект изменения оценки обслуживания клиентов в узле *Node₁* был рассмотрен относительно среднего времени ожидания клиента в других узлах.

Модель имеет 560 состояний и 2064 перехода. Среднее время ожидания *W_j* вычислено для каждого узла с использованием закона о малом

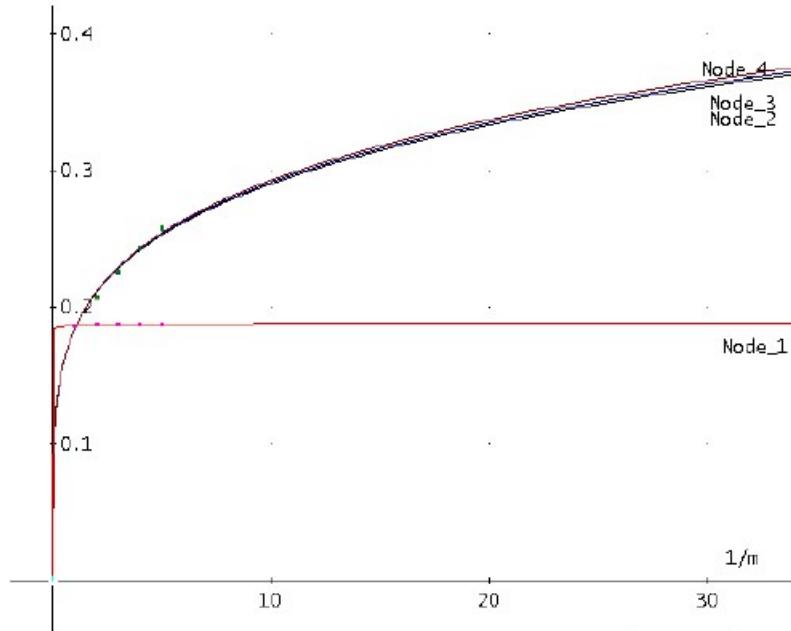


Рис. 4. Зависимость времени ожидания W клиента от требования обслуживания $1/m$

числе испытаний. Эти значения, представлены требованием обслуживания $1/m$ в $Node_1$, и указаны на рис. 4.

$$\begin{aligned}
 Node_{100} &\stackrel{\text{def}}{=} (in, 2\lambda).Node_{110} + (pass_1, 2e).Node_{100} \\
 Node_{110} &\stackrel{\text{def}}{=} (in, \lambda).Node_{111} + (engage_1, 2e).Node_{120} \\
 Node_{111} &\stackrel{\text{def}}{=} (engage_1, 2e).Node_{121} \\
 Node_{120} &\stackrel{\text{def}}{=} (in, \lambda).Node_{121} + (pass_1, 2e).Node_{120} + (serve, \perp).Node_{100} \\
 Node_{121} &\stackrel{\text{def}}{=} (engage_1, 2e).Node_{122} + (serve, \perp).Node_{110} \\
 Node_{122} &\stackrel{\text{def}}{=} (pass_1, 2e).Node_{122} + (serve, \perp).Node_{120} \\
 Node_{j0} &\stackrel{\text{def}}{=} (in, \lambda).Node_{j1} + (pass_j, e).Node_{j0} \quad j = 2, 3 \\
 Node_{j1} &\stackrel{\text{def}}{=} (engage_j, e).Node_{j2} \\
 Node_{j2} &\stackrel{\text{def}}{=} (serve, \perp).Node_{j0} + (pass_j, e).Node_{j2} \\
 S &\stackrel{\text{def}}{=} (walk, \omega/3).S_1 + (walk, \omega/3).S_2 + (walk, \omega/3).S_3 \\
 S_j &\stackrel{\text{def}}{=} (pass_j, \perp).S + (engage_j, \perp)(serve, \mu).S \quad 1 \leq j \leq 3 \\
 MSMQff &\stackrel{\text{def}}{=} (Node_{100} \| Node_{20} \| Node_{30})_{(engage_j, pass_j, serve_j)} (S \| S) / \{pass_j, engage_j\}, \text{ для } 1 \leq j \leq 3
 \end{aligned}$$

Рис. 5. Асимметричная модель $MSMQ$ с отмеченным узлом $Node_1$

Модель зависимости времени ожидания W клиента от требования обслуживания $1/m$, представленная на рис. 4, будет иметь вид:

для узла $Node_1$ $W = 0.18638(1/m)^{0.0039438}$,

для узла $Node_2$ $W = 0.1835(1/m)^{0.1992003}$,

для узла $Node_3$ $W = 0.183595(1/m)^{0.2007189}$,

для узла $Node_4$ $W = 0.183618(1/m)^{0.2028676}$.

$$\begin{aligned}
 Node_{100}^{\downarrow} &\stackrel{\text{def}}{=} (in, 2\lambda).Node_{110} + (pass_1, 2e).Node_{100}^{\downarrow} \\
 Node_{110}^{\downarrow} &\stackrel{\text{def}}{=} (in, \lambda).Node_{111} + (engage_1, e).Node_{120} + (pass_1, e).Node_{110}^{\downarrow} \\
 Node_{111}^{\downarrow} &\stackrel{\text{def}}{=} (engage_1, 2e).Node_{121} \\
 Node_{120}^{\downarrow} &\stackrel{\text{def}}{=} (in, \lambda).Node_{121} + (pass_1, 2e).Node_{120} + (serve, \perp).Node_{100}^{\downarrow} \\
 Node_{121}^{\downarrow} &\stackrel{\text{def}}{=} (engage_1, e).Node_{122} + (pass_1, e).Node_{121} + (serve, \perp).Node_{110}^{\downarrow} \\
 Node_{122}^{\downarrow} &\stackrel{\text{def}}{=} (pass_1, 2e).Node_{122} + (serve, \perp).Node_{120}^{\downarrow} \\
 MSMQwf &= (Node_{100}^{\downarrow} \| Node_{20}^{\downarrow} \| Node_{30}^{\downarrow})_{(engage_j, pass_j, serve)} (S||S)/\{pass_j, engage_j\}, \text{ для } 1 \leq j \leq 3
 \end{aligned}$$

Рис. 6. Модифицированная версия модели с дефектным интерфейсом $Node_1$

Таблица 3: Значения параметров для моделей

$MSMQff$ и $MSMQwf$			
in	$pass_j$ или $engage_j$	$serve$	$walk$
λ или 2λ	e или $2e$	μ	ω
0.1	$e = 50$	1.0	3, 6, 9, 12, 15

Предполагаемое время ожидания клиента в узле $Node_1$ мало изменяется в зависимости от изменения требования обслуживания в узле. Предполагаемое время ожидания клиента в других узлах растет быстрее в зависимости от изменения требования обслуживания, чем в узле $Node_1$. Интересно отметить, что эта оценка при-

роста идет несколько медленнее в узле $Node_1$ в зависимости от изменения требования обслуживания по сравнению с отмеченным узлом $Node_2$.

Отмеченный узел $Node_2$ имеет возможность использовать второй сервер, обгоняющий первый сервер, занятый в узле $Node_1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сорокин А.С. Модели симметричных систем опроса в теории организации очередей//Вестник. КузГТУ, 2011. № 6 . С. 66-71.
2. Сорокин А.С. Алгебра процесса моделирования характеристик// Вестник. КузГТУ, 2011. № 5 . С. 105-109.
3. Сорокин А.С. Парадигмы программирования и алгебра процесса моделирования характеристик. // Вестник. КузГТУ., 2011. № 4 . С. 77-82.
4. Aldinucci M, Danelutto M. Algorithmic Skeletons Meeting Grids. // Parallel Computing, 32(7-8). 2006. p. 449-462.
5. Hillston J. A Compositional Approach to Performance Modelling. Cambridge University Press, 1996.
6. Сорокин А.С. Применение полумарковских процессов к определению характеристик надежности технологических схем. // Вестник КузГТУ, 2005. № 1. С. 3 -9.
7. Сорокин А.С. Структурное моделирование надежности технологических систем с использованием скелетонов// Вестник. КузГТУ, 2008. № 4(68). Кемерово, С. 31-45.
8. Сорокин А.С. Математическое моделирование оценки надежности технологических систем// Вестник. КузГТУ., 2008. № 5(69). Кемерово, С. 28-37.
9. Сорокин А.С. Применение методов теории вероятностей к исследованию некоторых производственных процессов//Труды 4-ой междунар. конф. Кибернетика и технологии XXI века. Воронеж, 2003. С. 312-323.
10. Сорокин А.С. Марковские процессы в теории надежности технологических систем гидродобывающей промышленности// Вестник. КузГТУ., 2008. № 1. С. 61-69.
11. Коэн Дж., Боксма О. Граничные задачи в теории массового обслуживания. М.: МИР, 1987.
12. Королюк В.С., Томусяк А.А. Описание функционирования резервированных систем посредством полумарковских процессов. //Кибернетика, вып.5, 1965.
13. Сорокин А.С. Системы линейных уравнений. Основные понятия анализа. Полумарковские процессы. (Гриф УМО). Изд. СибГИУ. Новокузнецк, 1998. – 151 с.
14. Marsan, M.A., Donatelli S., Neri F. GSPN Models of Markovian Multiserver Multiqueue Systems.//

Performance Evaluation, 11, 1990.

15. Raith T. Performance Analysis of Multibus Interconnection Networks in Distributed Systems.//In M. Akiyama, editor, Teletraffic Issues in an Advanced Information Society ITC-11. Elsevier, 1985.
16. Morris R.J.T., Wang Y.T. Some Results for Multiqueue Systems with Multiple Cyclic Servers. In H. Rudin and W. Bux, editors, //Performance of Computer Communication Systems. Elsevier, 1984.
17. Kamal A.E., Hamacher V.C. Approximate Analysis of Non-exhaustive Multiserver Polling Systems with Applications to Local Area Networks.//Computer Networks and ISDN Systems, 17(1), 1989.
18. Yang Q., Ghosal D., Bhuyan L. Performance Analysis of Multiple Token Ring and Multiple Slotted Ring Networks. //In Proceedings of Computer Network Symposium, Washington DC, 1986.
19. Yuk T.I., Palais J.C. Analysis of Multichannel Token Ring Networks.//In Proceedings of the International Conference on Communication Systems, 1988.
20. Takagi H. Queueing Analysis of Polling Models: An Update.//In H. Takagi, editor, Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems. IFIP/North Holland, 1990.
21. Choi H., Trivedi K.S. Approximate Performance Models of Polling Systems Using Stochastic Petri Nets.//In Proceedings of INFOCOM'92, 1992.
22. Ibe O.C., Trivedi K.S. Stochastic Petri Net Models of Polling Systems.//IEEE Journal on Selected Areas of Communication, 8(9), 1990.
23. Grillo D. Polling Mechanism Models in Communication Systems - Some Application Examples.//In H. Takagi, editor, Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems. IFIP/North Holland, 1990.
24. Marsan M.A., Donatelli S., Neri F., Rubino U. On The Construction of Abstract GSPNs: An Exercise in Modelling. In J. Billington and W. Henderson, editors, Petri Nets and Performance Modelling.//IEEE, December 1991.
25. Bunday B.D., Khorram E. The Efficiency of Uni-directionally Patrolled Machines with Two Robot Repairmen.//European Journal of Operational Research, 39(1), 1989.

□Автор статьи:

Сорокин
Андрей Семенович
- канд. физ.-мат. наук, доцент, ст. н. с.
(филиал КузГТУ, г. Новокузнецк).
тел.: 8(3843) 772459