ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 515.2

К. А. Куспеков

МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ КОНФИГУРАЦИИ КРАТЧАЙШИХ СВЯЗЫВАЮЩИХ ЛИНИЙ ДЛЯ ТОЧЕК ПЛОСКОСТИ С ПОЛЯРНОЙ МЕТРИКОЙ

При определении оптимальной конфигурации инженерных сетей часто приходится рассматривать криволинейные трассы, которые можно аппроксимировать отрезками прямых и дуг окружностей. Геометрическая модель таких задач представляет собой плоскость с полярной метрикой.

Пусть на плоскости с полярной метрикой задано конечное множество из n точек, которое нужно связать между собой линией кратчайшей длины.

Для этой оптимизационной задачи, интересной для различных областей науки и техники, общее решение отсутствует.

Поэтому предлагаются решения, близкие к оптимальному и удовлетворяющие потребностям инженерной практики. До сих пор эта задача рассматривалась в пространствах с евклидовой метрикой [1]. Здесь она исследуется для пространства с полярными расстояниями [2, 3].

Методика построения кратчайшего дерева для четырех точек плоскости с полярной метрикой рассмотрена в [4]. Здесь разработаны различные топологии минимального дерева для четырех точек и. Обобщая результаты выполненных нами исследований, можно предложить следующий алгоритм построения кратчайших связывающих линий на плоскости с полярной метрикой.

1. Выбираем полярную систему координат, а затем определяем положение заданных точек M_1, M_2, ... M_m по полярным координатам.

Проводим из центра 0 (полюс) концентрические окружности, радиусы которых отличаются друг от друга на единицу длины.

Проводим равномерные лучи пучка носителем 0 через каждые 2 - 3° в зависимости от требуемой точности. Образуется полярная сетка, заданные точки можно считать расположенными в узлах этой сетки.

2. Определяем расстояния между точками , используя :

$$d(M_1, M_2) = \begin{cases} p + p_2, \text{если} \left|\varphi_1 - \varphi_2\right| \geq 2; \\ \left|p_1 + p_2\right| + p_1(\varphi_1 - \varphi_2) \text{если} \left|\varphi_1 - \varphi_2\right| < 2 \text{и} p_1 < p_2; \\ \left|p_1 - p_2\right| + \left|p_2(\varphi_1 - \varphi_2\right|, \text{если} \left|\varphi_1 - \varphi_2\right| < 2 \text{и} p_1 > p_2. \end{cases}$$

или применяя непосредственные измерения на изображениях. Составляем матрицу расстояний.

3. Из множества заданных точек выбирается две точки M_i и M_j, расстояние между которыми наименьшее, чем для любой другой пары. Строятся $КД_2$ (кратчайшее дерево для двух точек) и эквидистанционная линия для этих точек.

4. На последующих шагах алгоритма производится переход от $КД_i$, построенного для группы из i точек, к $КД_{i+1}$ для группы из $i+1$ точек. При этом определяются очередная $(i+1)$-я точка, которая должна быть подключена к дереву, и конфигурация $КД_{i+1}$. При этом построенная $КД_i$ войдет в состав $КД_{i+1}$ с некоторыми структурными изменениями.

В рис. 1. показано численный пример построения кратчайшего дерево для пяти точек.

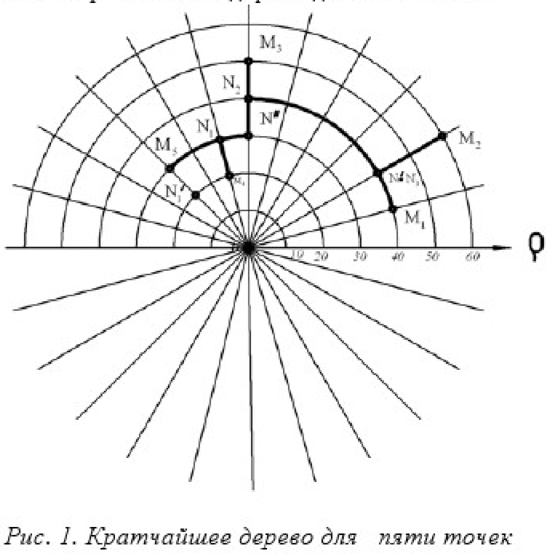

Рис. 1. Кратчайшее дерево для пяти точек

Если угол между смежными радиусами, на которых лежат соединяемые точки, больше или равен 115°, то соединяем их между собой магистральным отрезком, а если этот угол меньше 115° [2], то соединяем посредством дугорадиального отрезка.

После построения $КД_i$ может возникнуть необходимость соединения на следующем шаге двух близких друг к другу точек, не вошедших в $КД_i$ и дающих начало новой группе соединяемых точек, т. е. образуется новое кратчайшее поддерево. Такие поддеревья должны далее соединяться по принципу ближайшего соседа.

Рассмотрим методику построения кратчайших связывающих линий для точек плоскости:

- заданные точки разбиваются на отдельные подмножества;

- точки каждого подмножества соединяются применением алгоритма [5] и определяются конфигурации кратчайшего дерева для каждого множества;

- построенные кратчайшие деревья для всех подмножеств соединяются на основе принципа ближайшего соседа;

- применив программу POLSET на языке Турбопаскаль, специалист предлагает несколько вариантов разбиения точек на отдельные подмножества, затем ЭВМ определяет конфигурации кратчайшего дерева для каждого подмножества. Сравнивая различные варианты, принимаем окончательное решение.

Сущность методики покажем на примере: пусть заданы точки $M_1, M_2, \ldots, M_{18}$.

Требуется построить оптимальную конфигурацию кратчайших связывающих линий для 18 точек, имеющую минимальную протяженность. Изучив расположение точек, визуально разбиваем их на пять множеств: первое подмножество включает в себя точки M_1, M_{11}, M_{15}, M_{18}; второе подмножество – точки M_2, M_6, M_{12}; третье подмножество – M_3, M_7, M_{13} и M_{16}; четвертое подмножество – M_5, M_{10}, M_{14}, M_{17} и пятое подмножество – M_4, M_8, M_9.

Далее, применив вышеописанный алгоритм для множества точек кратчайшего дерева, строим конфигурации для всех пяти подмножеств по отдельности. Затем на основе принципа ближайшего соседа объединяем все подмножества в одно дерево.

Конечный результат построения показан на рис. 2.

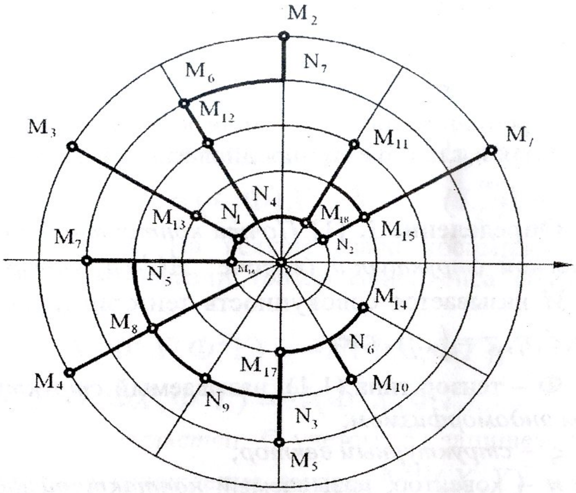

Рис. 2. Оптимальная конфигурация кратчайших связывающих линий для 18 точек плоскости

Используя возможности современной компьютерной технологии можно построить различные варианты конфигурации и путем их сравнения выбрать топологию, отвечающую наперед заданным условиям проектируемой инженерной сети.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Есмухан Ж. М.* Проблема Штейнера и ее прикладной алгоритм / Ж. М. Есмухан, К. А. Куспеков //Журнал «Пойск», 2006. - №1. – С.227-231.

2. *Есмуханов Ж. М.* Геометрия плоскости с полярной метрикой//Прикладная геометрия и инженерная графика: Сб.науч.тр.-Алма-Ата: КазПТИ, 1978.-Вып.3.-С.10-15.

3. *Куспеков К. А.* Алгоритм построения кратчайшей сети сбора и транспорта нефти / К. А. Куспеков // Вестник КузГТУ, 2011. № 4. С. 64-66.

4. *Куспеков К. А.* Определения оптимальной топологий кратчайшего дерева для четырех точек плоскости с полярной метрикой / К. А. Куспеков, В. Я. Волков // Вестник СибАДИ, 2011. №1. С. 66-68.

5. *Куспеков К.А.* Алгоритм построения кратчайших связывающих линий на плоскости с полярной метрикой. Материалы Второй Украинско-российской научно-практической конференции «Современные проблемы геометрического моделирования». - Харьков, 24-27 апреля 2007 г. – С. 158-163.

Автор статьи:

Куспеков
Кайырбек Амиргазыулы,
канд. техн. наук, доцент, зав. каф.
«Начертательная геометрия и инженерная графика» (Казахский национальный технический университет им. К.И. Сатпаева, г.Алматы).
E-mail: kuspekov_k@mail.ru
тел.: 8 – 705 – 249 – 02 – 43,