

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.21

А.С.Сорокин

### МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ ГИДРОДОБЫЧИ УГЛЯ

#### § 1. *Общие замечания*

Современное угледобывающее предприятие представляет собой сложный комплекс подземных и наземных сооружений, оснащенных достаточно сложным оборудованием. Наблюдается рост производственной мощности угольных предприятий, поточности технологии добычи, увеличиваются нагрузки на очистные забои.

В этих условиях, когда ответственность каждого технологического блока в технологической цепи шахт повышается и аварийные ситуации с оборудованием, горными выработками и сооружениями приводят к значительным экономическим убыткам, связанным с условно постоянными расходами, недостаточно при проектировании горных предприятий согласовывать технологические блоки только по производительности. Необходимо согласование и по параметрам надежности. Отсутствие согласования по надежности приводит к появлению узких мест в технологической цепи, следствием чего являются простои высоко-производительного оборудования. Источниками узких мест в технологической цепи обычно становятся те технологические блоки, которые имеют низкие показатели надежности.

Из сказанного становится ясным, что не учет параметров надежности основного технологического оборудования на стадии проектирования объектов технического обслуживания, в конечном счете, приводит к снижению технико-экономических показателей деятельности шахты на стадии эксплуатации. Непременной частью любого проекта шахты должен быть расчет параметров надежности, как отдельных технологических блоков, так и всей технологической цепи. Такой расчет позволит выявить уже на стадии проектирования узкие места процесса угледобычи, предусмотреть и оценить мероприятия по ликвидации этих узких мест.

Однако для проведения всего комплекса расчетов необходимо, прежде всего, создание математических моделей надежности отдельных технологических блоков и всей технологической цепи, с одной стороны, а с другой, - необходим сбор статистических данных о параметрах безотказности и ремонтопригодности всего технологического оборудования. Только в этом случае станет

реальностью привлечение методов теории надежности в практику проектирования горных предприятия.

#### § 2. *Гидрошахта как объект исследования теории надежности*

Особенностью процесса гидродобычи является его поточный характер. Все технологические блоки связаны водой, вода здесь - носитель энергии для отделения угля от массива (при гидравлической отбойке) и средство для его транспортирования (гидравлическая отбойка, механогидравлическая выемка, выемка с помощью буро-взрывных работ) по выработкам на поверхность и даже к потребителю. Отсутствие воды означает прерывание процесса гидродобычи.

По своему назначению в технологической цепи гидрошахт можно выделить следующие основные технологические блоки:

- блок водоснабжения, включающий в себя высоконапорную насосную станцию (ВНС) и систему высоконапорных водоводов, основная задача этого блока - подача воды в забой;

- блок забоев, где собственно осуществляется добыча угля с помощью гидравлической отбойки, механогидравлическим или буровзрывным способами;

- безнапорный транспорт осуществляет транспортирование угля по наклонным горным выработкам из забоев в камеру гидравлического подъема;

- блок гидравлического подъема, включающий в себя камеру гидравлического подъема (КГП), оборудованную углесосами или эрлифтами, и систему пульповодов; основная задача этого блока - подача пульпы на поверхность;

- обогатительный или обезвоживающий комплексы (фабрики), назначения которых - обезвоживание или обогащение угля.

В зависимости от глубины залегания угля, от удаленности фабрик от шахт возможно появление дополнительных перекачивающих станций.

Авария на любом блоке приводит к прерыванию процесса гидродобычи, т.е. между технологическими блоками гидрошахт существует жесткая технологическая зависимость, чтобы как-то ослабить эту зависимость и снизить экономическую

ские потери из-за простоев, строятся промежуточные аккумулирующие емкости между блоками. В настоящее время эти аккумулирующие емкости сооружаются в блоках водоснабжения, гидравлического подъёма и на обогатительном или обезвоживающем комплексах.

Другим средством повышения параметров надежности всего технологического процесса является резервирование.

Основная цель данной работы состоит в обосновании и разработке методов оптимизации резервного оборудования для технологических блоков водоснабжения и гидравлического подъёма гидрошахт.

В данное время у проектировщиков укоренялось мнение, что независимо от параметров надежности элементов, входящих в схемы этих блоков, на каждый работающий насос ставить один резервный и на каждый работающий углесос - два резервных. Такая кратность резервирования экономически не обоснована и мотивируется только тем, что блок водоснабжения обычно расположен на поверхности и аварийный останов на нем может быть ликвидирован значительно быстрее, чем в блоке гидравлического подъёма.

Кратность резервирования не может быть задана раз и навсегда. Кратность резервирования оборудования для технологических блоков водоснабжения и гидравлического подъёма должна рассчитываться для каждой гидрошахты. Она должна пересматриваться с изменением параметров надежности основного оборудования указанных блоков.

Возможность же оптимизации существует, так как наличие резерва, с одной стороны, сокращает убытки из-за простоев шахты по вине аварийных отказов блоков водоснабжения и гидравлического подъёма. Но, с другой стороны, требует капитальных дополнительных вложений, т.е. имеются две взаимно противоположные экономические тенденции, в условиях действия которых может быть сформулирована и решена задача об оптимальном выборе кратности резервирования.

### **§ 3. Критерий оптимальности**

Одной из основных задач при создании любой математической модели оценки качества [1,2] технологического объекта является определение резервирования оборудования (кратности технологических объектов) блоков водоснабжения и гидравлического подъёма, как и при создании любой модели оптимизации, является выбор критерия оптимальности. Критерий оптимальности в конечном счете определяет эффект оптимизации, сложность поставленной задачи, метода её решения и необходимую исходную информацию.

Критерий оптимальности выбран на основе "Типовой методики определения экономической эффективности капитальных вложений" [3] в форме:

$$\mathcal{E} = P_n \frac{t_n}{T_n} + E_H K, \quad (1)$$

где  $K$  - капитальные вложения для каждого варианта кратности резервирования, тыс. руб.,

$E_H$  - нормативный коэффициент эффективности капитальных вложений;

$P_n$  - годовые условно-постоянные расходы для каждого варианта кратности резервирования, тыс. руб.;

$t_n$  - годовая длительность простоев из-за отказов в блоках водоснабжения или гидравлического подъёма для каждого варианта кратности резервирования, час;

$T_n$  - плановое годовое время работы шахты, час.

Величины  $P_n$ ,  $t_n$ ,  $K$  являются функциями кратности резервирования  $n$ . Особенность этих функций состоит в том, что их аргумент может принимать только неотрицательные целые значения и  $P_n$ ,  $K$  - возрастающие функции  $n$ , а  $t_n$  - убывающая функция  $n$ .

После выбора критерия оптимальности задача данной работы может быть кратко сформулирована следующим образом:

требуется так подобрать кратность резервирования  $n$  для блоков водоснабжения и гидравлического подъёма гидрошахт, чтобы критерий оптимальности  $\mathcal{E}$  принял минимальное значение.

### **§ 4. Обоснование структуры и элементного состава комплексного критерия**

Для вычисления критерия оптимальности для каждого варианта кратности резервирования необходимо, исходя из равенства (1), знать: условно-постоянные расходы, капиталовложения и время простоев. Величины  $E_H$  и  $T_n$  являются нормативными и их можно считать параметрами критерия оптимальности.

**А)** Методика определения условно-постоянных расходов.

На основании "Отраслевой методики" [3] к условно-постоянным расходам относятся те статьи затрат, которые не зависят от объема добычи шахты. Эти затраты в случае аварийной остановки шахты ложатся на себестоимость выпускаемой продукции. Уменьшение себестоимости продукции по статье "условно-постоянные затраты" можно достичь за счет увеличения добычи по шахте, в том числе и за счет сокращения аварийных простоев по вине блоков гидравлического подъёма и водоснабжения.

Ниже приведена методика определения условно-постоянных расходов при аварийных остановках по вине блока гидравлического подъёма.

Исходной информацией для расчета условно-постоянных затрат для проектируемых шахт служит технический проект. Для эксплуатируемых

шахт такой информацией может служить отчетная документация по шахте. Настоящая методика составлена только для вновь проектируемых шахт.

Число элементов затрат, составляющих условно-постоянные расходы, значительно больше, чем число элементов затрат, зависящих от объемов добычи (переменных затрат). В связи с этим более рационально условно-постоянны затраты  $P_n$  вычислять как разницу между полными (проектными) затратами  $P_{np}$  и "переменными" затратами  $P_u$ :

$$P_n = P_{np} - P_u \quad (2)$$

Полные затраты  $P_{np}$  определяются по элементам затрат: материалы, топливо, электроэнергия, заработка плата с начислениями, амортизация и прочие денежные расходы.

По статье "материалы" к переменным затратам отнесены лесные материалы для очистных и подготовительных работ – 100%, погашение стоимости металлического крепления для очистных и подготовительных работ – 100%, взрывчатые материалы и электрические детонаторы – 100%.

Стоимость всех остальных материалов отнесена к условно - постоянным затратам.

По статье "топливо" все 100% затрат отнесены к условно - постоянным затратам.

По статье "электроэнергия" к условно - постоянным затратам относятся: годовая плата за установленную мощность, а так же дополнительная плата, учтенная счетчиком для токо-приемников, которые в случае аварийного останова шахты из-за отказов в блоках водоснабжения или гидравлического подъема продолжают работать (вентиляторы главного проветривания, установки дегазации, водоотлив, освещение, межлический подъем и т.п.).

По статье "заработка плата с начислениями" к переменным затратам отнесена заработка плата с начислениями подземных рабочих очистных и подготовительных работ, за исключением заработной платы с начислениями: лиц участкового надзора, машинистов забойных и транспортных механизмов, участковых электрослесарей, взрывников, газомерщиков, участковых транспортных рабочих.

По статьям "амортизация" и "прочие денежные расходы" все 100% затрат отнесены к условно-постоянным расходам. В качестве примера использованы данные годовых условно-постоянных затрат для гидрошахты "Красногорская".

**Б)** Методика определения капитальных затрат.

В качестве базисного варианта, с которым будут сравниваться все остальные варианты, берется вариант кратности резервирования, принятый в проекте шахты. Капитальные затраты по базисному варианту определяются по сметно-

финансовому расчету конкретного проекта гидрошахты.

Основные статьи капитальных вложений для блоков водоснабжения и гидравлического подъема связаны со строительством здания высоконапорной насосной станции или камеры гидравлического подъема, с приобретением и монтажом основного технологического оборудования.

Капитальные затраты по варианту с дополнительным резервированием насосов или углесосов определяются как сумма затрат по базисному варианту и дополнительных затрат на установку резервного оборудования по формуле:

$$K = K_b \pm n_p K_p, \quad (3)$$

где  $K_b$  - капитальные затраты по базисному варианту;

$K_p$  - капитальные затраты на установку дополнительного насоса или углесоса;

$n_p$  - количество дополнительных резервных насосов или углесосов.

Знак "плюс" или "минус" берется: если добавляется ли или уменьшается по отношению к базисному варианту общее число установленных насосов или углесосов.

Наиболее просто найти капитальные дополнительные вложения при наличии сметно-финансовых расчетов проекта гидрошахты.

**Б)** Методика определения годовых простоеv.

Как видно из вышеизложенного, трудностей в определении условно-постоянных расходов и капитальных дополнительных затрат для каждого варианта резервирования не существует. Они могут быть рассчитаны обычными методами, принятыми в экономике.

Вся трудность решения поставленной задачи сводится к нахождению годовых суммарных простоеv  $t_n$  из-за перерывов в работе блока водоснабжения или гидравлического подъема. Время простоев  $t_n$  технологической цепи гидрошахты можно найти только методами, разработанными и применяемыми в теории надежности.

Основной исходной информацией для расчета величины  $t_n$  являются законы распределения времени безотказной работы и времени восстановления элементов схем насосных и углесосных станций: насосов, углесосов и электродвигателей к ним, задвижек, обратных клапанов и выключателей.

Указанные законы могут быть получены только статистически через посредство сбора и обработки статистической информации о промежутках времени безотказной работы и времени восстановления всех элементов схем. Как показывает опыт, накопленный отделом надежности, в последствии лабораторией надежности и износостойкости, ВНИИГидроугля в качестве закона распределения времени безотказной работы и времени восстановления всех элементов схем

может быть принят экспоненциальный закон. Только требуется для каждого элемента оценить параметр этого закона, но для этого необходимо значительно меньше статистических данных.

Без знания законов распределения поставленная задача не может быть решена. Правда, для существующих схем на гидрошахтах можно собрать данные о годовых простоях по вине блока водоснабжения или гидравлического подъёма, но эти данные будут привязаны только к определенным схемам и они теряют практическую ценность при изменении структуры самой схемы.

Изменение же схем на действующих гидрошахтах с последующим сбором и обработкой статистических данных о простоях производить не представляется возможным, так как этот процесс, во-первых, очень длительный, во-вторых, дорогостоящий, в-третьих, он неблагоприятно оказывается на работе гидрошахты.

Приемлемым методом с учетом сделанных замечаний может быть математического моделирования, позволяющей для каждой кратности резервирования по исходной информации с учетом технологической структуры схем найти интересующую нас величину  $t_n$  - суммарное годовое время простоев гидрошахты из-за аварий рассматриваемых технологических блоков водоснабжения и гидравлического подъёма.

### § 5. Процесс построения математических моделей

Анализ существующих схем блоков водоснабжения и гидравлического подъёма на действующих шахтах указывает на их блочную структуру: в схемах предусматривается обычно столько абсолютно одинаковых и несвязанных между собой подблоков, сколько требуется для одновременной работы насосов и углесосов, чтобы обеспечить необходимую производственную мощность шахты. В этих условиях для упрощения решения задачи будем производить оптимизацию блока водоснабжения или гидравлического подъема не в целом, а по подблокам.

Процесс построения модели включает в себя следующие этапы работ:

построение технологических схем подблоков для каждой кратности резервирования; на основе построенных технологических схем создание схем надежности для каждого варианта кратности резервирования, составление на базе созданных схем надежности графов возможных состояний, где вершины графа означают возможные состояния, а дуги со стрелками - направления возможных переходов из одних состояний в другие.

Так как число элементов схем при любой цесообразной кратности резервирования будет конечным, то и сам график состояний - конечный. Это означает, что число состояний на графике будет конечным числом.

Из всех возможных состояний выделяются

состояния, при которых подблок выполняет возложенные на него функции. Сумма вероятностей этих состояний дает долю времени (коэффициент готовности  $K_T$ ) из заданного периода  $T_n$  нормальной работы подблока, а сумма вероятностей оставшихся состояний - долю времени простоя (коэффициент простоя  $K_n$ ) гидрошахты из-за аварийных остановов [4,5].

Из сказанного вытекает, что время простоев  $t_n$  для каждого варианта резервирования определяется, если удаётся каким-либо методом по заданным законам распределения времени безотказной работы и времени восстановления элементов схем найти вероятности состояний.

### § 6. Основные этапы построения алгоритма

Так как время безотказной работы и время восстановлений распределены по экспоненциальному закону, то каждый элемент схем создает простейший (пуассоновский) поток отказов и восстановлений. Для решения задачи отыскания времени простоев  $t_n$  - можно воспользоваться однородными марковскими процессами с непрерывным временем и с конечным числом состояний, широко применяемыми в теории массового обслуживания. Простейшие потоки отказов и восстановлений обладают свойствами стационарности, ординарности и свойством беспоследействия, причем параметры потока отказов и потока восстановлений для  $i$ -го элемента соответственно равны:

$$\lambda_i = 1 / T_{ci}, \mu_i = 1 / T_{bi},$$

где  $T_{ci}$  - среднее время (математическое ожидание) безотказной работы элемента;

$T_{bi}$  - среднее время восстановления элемента [6, 7].

### а) Схема насосной и углесосной станций без резерва.

Принципиальные схемы подблоков насосной станции или углесосной станции без резерва ничем не отличаются друг от друга. Разница имеется только в некоторых элементах, входящих в схемы. Символическая схема насосной станции или углесосной станции без резерва приведена на рис. 1.

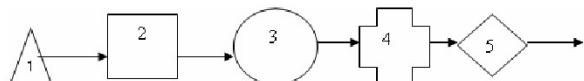


Рис. 1. Схема насосной или углесосной станции без резерва.

1 – выключатель, 2 – электродвигатель, 3 – насос или углесос, 4 – задвижка, 5 – обратный клапан.

В силу свойств пуассоновских потоков отказов и восстановлений в любой момент времени данная схема может находиться в работоспособном состоянии (обозначим его нулевым

состоянием) или в аварийном состоянии из-за отказа какого-либо одного элемента. Из сделанных ранее замечаний об отсутствии последействия полагаем, что два элемента или более одновременно отказать не могут. Следовательно, аварийных состояний может быть пять. Присвоим им номера согласно номерам элементов. После отказа элемент восстанавливается. Граф состояний вместе с условными (переходными) вероятностями изображен на рис. 2.

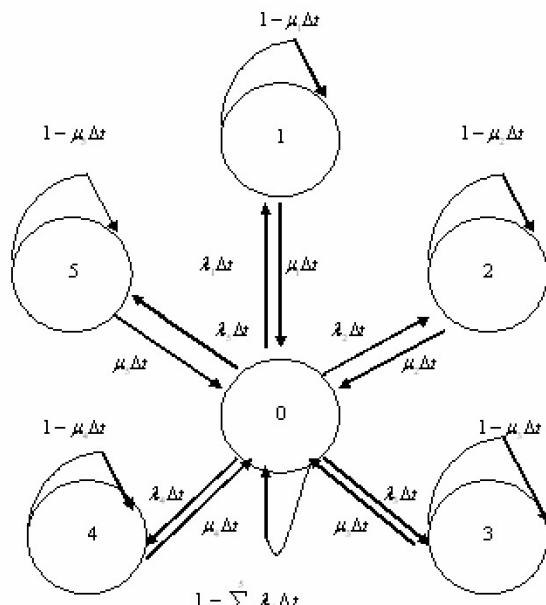


Рис. 2. Граф состояний.

Обозначая через  $P_i(t)$  и  $P_i(t+\Delta t)$  безусловные вероятности состояний в моменты  $t$  и  $t+\Delta t$ , а через  $P_{ji}(\Delta t)$  переходные вероятности за промежуток  $\Delta t$  и используя формулу полной вероятности [8]

$$P_i(t + \Delta t) = \sum_{j=0}^n P_j(t) P_{ji}(\Delta t),$$

получим разностную систему, а затем предельным переходом при  $\Delta t \rightarrow 0$  получим систему линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка, связывающую вероятности состояний с параметрами потоков отказов и восстановлений:

$$\begin{aligned} P'_0(t) &= -\sum_{i=1}^5 \lambda_i P_0(t) + \sum_{i=1}^5 \mu_i P_i(t); \\ P'_1(t) &= \lambda_1 P_0(t) - \mu_1 P_1(t); \\ P'_2(t) &= \lambda_2 P_0(t) - \mu_2 P_2(t); \\ P'_3(t) &= \lambda_3 P_0(t) - \mu_3 P_3(t); \\ P'_4(t) &= \lambda_4 P_0(t) - \mu_4 P_4(t); \end{aligned} \quad (4)$$

$$P'_5(t) = \lambda_5 P_0(t) - \mu_5 P_5(t).$$

К системе (4) необходимо добавить начальные условия:

$$P_0(0) = 1; \quad P_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Смысль этих начальных условий состоит в том, что в момент первоначального пуска нулевое состояние - достоверное событие.

Учитывая, что работа схемы рассматривается в течение длительного периода времени (в течение года), надобность в решении системы (4) отпадает.

Сначала рассмотрим стационарное решение, которое существует, так как рассматриваемая задача относится к задачам однородных марковских процессов.

Для отыскания стационарного решения, переходим от системы (4) к системе алгебраических уравнений, полагая, что в (4) производные равны нулю, что дает возможность заменить функции  $P_i(t)$  постоянными числами  $P_i$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 \lambda_i P_0 - \sum_{i=1}^5 \mu_i P_i &= 0; \\ \lambda_i P_0 - \mu_i P_i &= 0, \quad i = 1, \dots, 5. \end{aligned} \quad (5)$$

Система однородных алгебраических уравнений (5) допускает решения, отличные от нуля, так как первое уравнение является следствием всех остальных. Отбрасывая его, из последних пяти находим:

$$P_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} P_0, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Вводя обозначение  $\rho_i = \lambda_i / \mu_i$  и учитывая, что сумма вероятностей состояний равна 1, получим:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^5 \rho_i}; \quad P_i = \frac{\rho_i}{1 + \sum_{i=1}^5 \rho_i}, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (6)$$

Работоспособным состоянием является только нулевое состояние, все остальные состояния – аварийные. Поэтому коэффициент готовности, коэффициент простоя и время простоя :

$$K_F = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^5 \rho_i}; \quad K_n = \frac{\sum_{i=1}^5 \rho_i}{1 + \sum_{i=1}^5 \rho_i}; \quad t_n = K_n T_n. \quad (7)$$

Для расчета величин  $P_i$ ,  $K_F$ ,  $K_n$ ,  $t_n$  и критерия оптимальности  $\mathcal{E}$  составлена программа на языке Лисп [9] (пакет DERIVE 6.15). Исходной информацией программы являются: средние времена безотказной работы  $T_{cpi}$  и средние времена восстановлений  $T_{bi}$  элементов схем, а так же условные годовые затраты  $P_n$ ,

капиталовложения  $K$  и нормативный коэффициент эффективности  $E_n$ .

Перейдем к общему случаю, т.е. рассмотрим нестационарное решение.

Здесь приводится сразу эта система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} P_0'(t) &= -\sum_{i=1}^5 \lambda_i P_0(t) + \sum_{i=1}^5 \mu_i P_i(t); \\ P_1'(t) &= \lambda_1 P_0(t) - \mu_1 P_1(t); \\ P_2'(t) &= \lambda_2 P_0(t) - \mu_2 P_2(t); \\ P_3'(t) &= \lambda_3 P_0(t) - \mu_3 P_3(t); \\ P_4'(t) &= \lambda_4 P_0(t) - \mu_4 P_4(t); \\ P_5'(t) &= \lambda_5 P_0(t) - \mu_5 P_5(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Начальные условия

$$P_0(0) = 1; \quad P_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 5.$$

Получим систему линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка, связывающую вероятности состояний с параметрами потоков отказов и восстановлений:

В системе (8) исключая последовательно функции  $P_i(t)$ ,  $i=1,2,\dots,5$ , получаем уравнение резольвенты для функции  $P_0(t)$ :

$$\sum_{k=0}^5 a_k \frac{d^k P_0(t)}{dt^k} = f(t). \quad (9)$$

Тогда имеет место структурная формула решения уравнения (9) [10 - 13]:

$$P_0(x) = \int_{x_0}^x \sum_{i=1}^5 \left( \prod_{j=1, j \neq i}^5 (r_i - r_j) \right)^{-1} \exp(r_i(x-t)) f(t) dt. \quad (10)$$

Уравнению (9) соответствует алгебраическое уравнение (характеристическое)

$$\sum_{k=0}^5 a_k r^k = 0.$$

Решения этого уравнения  $r_i$ ,  $i=1,2,\dots,5$ , называются характеристическими числами.

Используя свойства цепных дробей, находим, что правая часть уравнения (10) есть отношение многочленов степени  $(m-1)$  относительно  $r$ .

Тогда (10) принимает вид

$$P_0(x) = \frac{Q_m(r)}{\tilde{P}_{m+1}(r)}, \quad (11)$$

где числитель и знаменатель - многочлены относительно  $r$  степени  $m$  и  $m+1$  соответственно.

Кроме того, имеет место

$$\tilde{P}_{m+2}(r) Q_m(r) - \tilde{P}_{m+1}(r) Q_{m-1}(r) = \pm 1$$

(соответственно при четном и нечетном  $m$ ) и

$$\tilde{P}_{m+1}(r) = (r - r_1)(r - r_2)\dots(r - r_{m+1}),$$

где

$$r_i \neq r_k, \quad i \neq k.$$

Из уравнения (11) находим вероятность безотказной работы технической системы

$$P_0(t) = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{Q_m(r_k)}{\tilde{P}_{m+1}(r_k)} e^{r_k t}, \quad (12)$$

причем

$$\tilde{P}_{m+1}'(r_k) = \lim_{r \rightarrow r_k} \left[ \frac{\tilde{P}_{m+1}(r)}{r - r_k} \right].$$

Тогда с помощью (12) получаем решение резольвенты (9) в виде:

$$P_0(t) = \sum_{i=1}^5 \frac{Q_5(r_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^5 (r_i - r_j)} \exp(r_i t).$$

Отсюда с помощью (4) получаем искомое решение

$$P_k(t) = \sum_{i=1}^5 \frac{Q_5^k(r_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^5 (r_i - r_j)} \exp(r_i t), \quad k = 1, \dots, 5.$$

### б) Схемы насосной и углесосной станций со стопроцентным резервом.

Схема насосной станции со стопроцентным резервом изображена на рис. 3. Приняты такие же условные обозначения, как и на рис. 1. Схема углесосной станции отличается от схемы насосной станции только тем, что вместо задвижки 6 ставится обратный клапан и вместо насосов – углесосы. Граф состояний совместно с переходными вероятностями строится аналогично графу, приведенному ранее (рис. 2.). Работоспособными состояниями являются состояния с нулевого по пятое включительно, остальные состояния (их 21 состояние) – аварийные.

Аналогично рассуждая, как и в подпункте "а", можем написать систему дифференциальных уравнений, из которой возникает система алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=0}^{26} b_{ij}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) P_i = 0; \quad j = 0, 1, \dots, 26; \quad (13)$$

где  $b_{ij}(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  - линейные функции векторов

$$\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{26}); \quad \bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{26}).$$

Система (13) допускает отличные от нуля решения, так как одно из уравнений является следствием всех остальных. Заменяя одно из них, например седьмое, соотношением

$$\sum_{i=0}^{26} P_i = 1,$$

получим систему неоднородных линейных уравнений с ненулевым определителем. Следовательно, эта система имеет единственное решение. Получить решение системы (13) в виде рекуррентной формулы не удается и это можно объяснить тем, что граф состояний схемы не цепного, а вет-

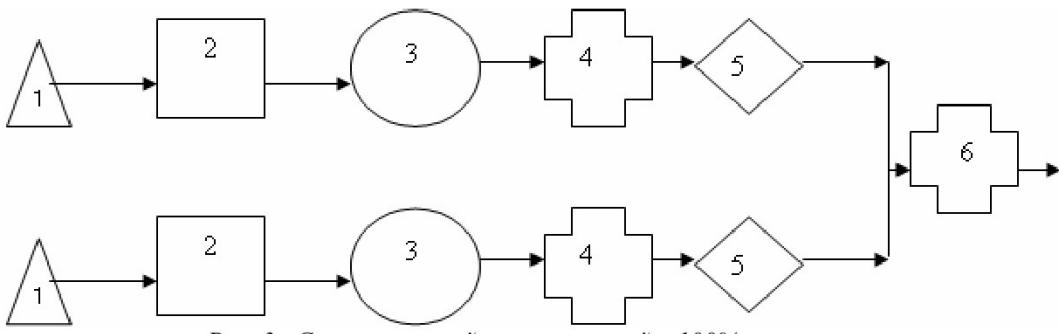


Рис. 3. Схема насосной или углесосной с 100% резервом.

1 – выключатель, 2 - электродвигатель, 3 – насос или углесос, 4 – задвижка.

вящегося типа.

Пришлось прибегнуть к помощи пакета DERIVE. Однако из-за ограниченности памяти ЭВМ в таком виде решить систему не представляется возможным. Пришлось понижать порядок системы до шести с помощью исключения переменных и решать ее в два этапа.

Исходной информацией для первой программы являются средние времена безотказной работы и средние времена восстановлений элементов схем, а для второй – результаты первой. Основная результирующая информация программы: коэффициенты готовности и простоя, время простоя, критерий оптимальности и вероятности состояний (с нулевого состояния по пятое).

Перейдем к общему случаю, т.е. рассмотрим нестационарное решение.

По аналогии с подпунктом "а" можем написать систему систем линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка, связывающую вероятности состояний с параметрами потоков отказов и восстановлений:

$$P'_j(t) = \sum_{i=0}^{26} b_{ij}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) P_i(t); \quad j = 0, 1, \dots, 26; \quad (14)$$

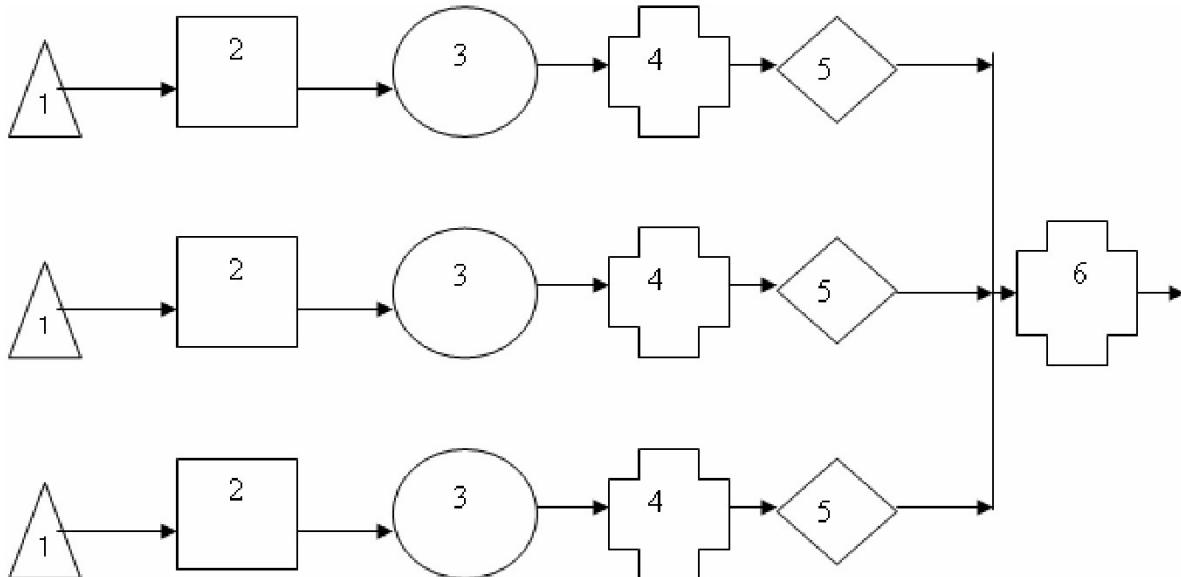


Рис. 4. Схема насосной или углесосной станции

с двойной кратностью резервирования: 1 – выключатель, 2 - электродвигатель, 3 – насос или углесос, 4 – задвижка, 5 – обратный клапан, 6 – задвижка.

с начальными условиями:

$$\sum_{i=0}^{26} P_i(0) = 1,$$

$$P_0(0) = 1, \quad P_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 26.$$

Последовательными исключениями получаем уравнение резольвенты для функции  $P_0(t)$ :

$$\sum_{k=0}^{26} a_k \frac{d^k P_0(t)}{dt^k} = f(t). \quad (15)$$

Тогда имеет место структурная формула решения уравнения (15) [10 - 14]:

$$P_0(x) = \int_{x_0}^x \sum_{i=1}^{26} \left( \prod_{j=1, j \neq i}^{26} (r_i - r_j) \right)^{-1} \exp(r_i(x-t)) f(t) dt. \quad (16)$$

Уравнению (15) соответствует характеристическое уравнение

$$\sum_{k=0}^{26} a_k r^k = 0.$$

Совершенно аналогично отыскивается

$$P_0(x) = \frac{\varrho_m(r)}{\tilde{P}_{m+1}(r)}, \quad (17)$$

$$P_0(t) = \sum_{i=1}^{26} \frac{Q_{26}(r_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{26} (r_i - r_j)} \exp(r_i t). \quad (18)$$

Отсюда с помощью (13) получаем искомое решение

$$P_k(t) = \sum_{i=1}^{26} \frac{Q_{26}^k(r_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{26} (r_i - r_j)} \exp(r_i t), \quad k = 1, \dots, 26.$$

**в) Схемы насосной и углесосной станции с двойной кратностью резервирования.** Схема насосной станции с двойной кратностью резервирования приведена на рис. 4. В схеме углесосной станции с двойной кратностью резервирования вместо задвижки 6 ставится обратный клапан под тем же номером и вместо насосов 3 – углесосы.

Граф состояний для данной схемы содержит уже 77 состояний, из них 21 состояние (с нулевого состояния по двадцатое) - работоспособные, остальные - аварийные.

Рассуждения, аналогичные подпунктам "а" и "б", приводят к системе 77 однородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Для отыскания стационарного решения имеем соответствующую систему алгебраических уравнений

$$\sum_{i=0}^{76} b_{ij}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) P_i = 0; \quad j = 0, 1, \dots, 76; \quad (19)$$

допускающую ненулевые решения.

С учетом

$$\sum_{i=0}^{76} P_i = 1,$$

последовательными исключениями получаем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений, обладающую единственным решением.

Решение полученной системы 76-го порядка на ЭВМ представляет определенные сложности как по соображениям памяти, так и стремительного роста вычислительной погрешности. Мы свели решение к системе 21-го порядка, оставив в ней в качестве неизвестных только вероятности работоспособных состояний. Естественно, при этом происходит потеря информации о нерабочих состояниях, так как исключается возможность определения вероятности каждого нерабочего состояния, а общий коэффициент простоя можно вычислить только через коэффициент готовности по формуле:

$$K_n = 1 - K_r.$$

Перейдем к общему случаю нестационарного решения.

Здесь получаем систему линейных однородных дифференциальных уравнений первого по-

рядка, связывающую вероятности состояний с параметрами потоков отказов и восстановлений:

$$P'_j(t) = \sum_{i=0}^{76} b_{ij}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) P_i(t); \quad j = 0, 1, \dots, 76; \quad (20)$$

с начальными условиями:

$$\sum_{i=0}^{76} P_i(0) = 1, \\ P_0(0) = 1, \quad P_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 76.$$

Последовательными исключениями получаем уравнение резольвенты для функции :

$$\sum_{k=0}^{76} a_k \frac{d^k P_0(t)}{dt^k} = f(t). \quad (21)$$

и

$$P_0(x) = \int_{x_0}^x \sum_{i=1}^{76} \left( \prod_{j=1, j \neq i}^{76} (r_i - r_j) \right)^{-1} \exp(r_i(x-t)) f(t) dt. \quad (22)$$

Отыскав решения характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^{76} a_k r^k = 0,$$

приходим к

$$P_0(x) = \frac{Q_m(r)}{\tilde{P}_{m+1}(r)}, \quad (23)$$

откуда находим вероятность безотказной работы технической системы

$$P_0(t) = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{Q_m(r_k)}{\tilde{P}_{m+1}(r_k)} e^{r_k t}, \quad (24)$$

$$\tilde{P}_{m+1}'(r_k) = \lim_{r \rightarrow r_k} \left[ \frac{\tilde{P}_{m+1}(r)}{r - r_k} \right].$$

С помощью (24) получаем решение резольвенты (22) в виде:

$$P_0(t) = \sum_{i=1}^{76} \frac{Q_{76}(r_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{76} (r_i - r_j)} \exp(r_i t).$$

С помощью (19) получаем искомое решение

$$P_k(t) = \sum_{i=1}^{76} \frac{Q_{76}^k(r_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{76} (r_i - r_j)} \exp(r_i t), \quad k = 1, \dots, 76.$$

## § 7. Выбор оптимальной кратности резервирования

Выбор оптимальной кратности резервирования осуществляется через сравнение значений критерия оптимальности , полученных на ЭВМ. Оптимальной считается та краткость резервирования, для которой критерий оптимальности при-

нимает наименьшее значение. Так как время простоев подсчитывается по формуле:

$$t_n = K_n T_n,$$

то критерии оптимальности в программах находится из выражения:

$$\mathcal{E} = P_n K_n + E_n K.$$

Может оказаться, что для целей оптимизации кратности резервирования недостаточно проведения расчетов до двойной кратности резервирования. В таких случаях необходимо по изложенной методике продолжить расчет критерия оптимальности для больших значений кратности резервирования.

#### *Выводы*

На основании проделанной работы можно констатировать следующее.

1. Создана математическая модель, позволяющая на стадии проектирования гидрошахт оптимизировать кратность резервирования основ-

ного оборудования технологических блоков водоснабжения и гидравлического подъёма.

2. Для использования модели в практике проектирования гидрошахт требуется определение законов распределения времени безотказной работы их параметров, а также и времени восстановления всех видов оборудования, применяемого на вышеуказанных технологических блоках: насосов, углесосов и электродвигателей к ним, задвижек, обратных клапанов и выключателей.

3. Помимо основного назначения, модель позволяет оценивать экономический эффект от повышения надежности оборудования блоков водоснабжения и гидравлического подъёма, достигнутый конструктивными изменениями или улучшениями качества изготовления.

4. Определенная часть этой работы может быть использована при проектировании нефтепрекачивающих станций, станций водоснабжения других предприятий и населения городов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сорокин А. С. Применение полумарковских процессов к определению характеристик надежности технологических схем. // Вестн. КузГТУ. 2005. № 1. С. 3 -9 .
2. Сорокин А. С. Аналитическое представление решения системы уравнений Колмогорова (оценка качества системы) // Вестн. КузГТУ. 2005. № 2. С. 88 -91.
3. Отраслевая методика определения экономической эффективности новой техники и совершенствования производства в угольной промышленности. ЦНИЭИуголь, М., 1973.
4. Барucha-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их применение. -М.: Наука, 1969. - 512с.
5. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. -М.: Наука, 1965. -363 с.
6. Броди С.М., Власенко О.Н., Марченко Б.Г. Расчет и планирование испытаний систем на надежность. –Киев: Наукова Думка. 1970.
7. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. -М.: Наука, 1968.
8. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. -М.: Физматгиз, 1962.
9. Дьяконов В.П. Системы компьютерной алгебры DERIVE. -М., 2002. -320 с.
10. Сорокин А.С. Параметрическое представление функций в конечносвязных областях.// Сиб. матем. журн. Новосибирск: Наука. 1997. Т.38, № 5. с. 1163 - 1178.
11. Сорокин А.С. Применение методов теории вероятностей к исследованию некоторых процессов производства. Труды 4-ой междунар. конф. Кибернетика и технологии XXI века. Воронеж, 2003. с. 312-323.
12. Сорокин А.С. Применение системы MATLAB для построения структурных формул некоторых классов аналитических функций в конечносвязных областях. Всероссийская конф.: Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB . М., 2002.
13. Sorokin A.S. Mixed boundary-value problem with free boundary for multiply connected domains. International conference free boundary problems in continuum mechanics. - Novosibirsk, 1991.
14. Сорокин А.С. Алгоритм решения систем уравнений Колмогорова (Оценка качества системы).// Вторая Всероссийская научная конф. Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB. - М., 2004. с. 389 – 397.
15. Сорокин А.С. Структурные формулы некоторых классов аналитических функций в конечносвязной области.// - М.: Матем. сб./ ИМ им. Стеклова РАН, Т. 188. №12. 1997. с.107 - 134.

□Автор статьи:

Сорокин  
Андрей Семенович  
- канд. физ.-мат.наук, доцент, ст.н.с.  
(филиал КузГТУ , г. Новокузнецк)