УДК 519.86.865.3

Е. А. Николаева

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЫНКА ГОСУДАРСТВЕННЫХ КРАТКОСРОЧНЫХ ОБЛИГАЦИЙ

ГКО являются ценными бумагами, не имеющими риска, и появляются на рынке последовательно во времени в виде разных выпусков. Обозначим через x_j^t - долю ГКО выпуска *j* в портфеле инвестора в момент времени *t*. Каждый выпуск может находиться на рынке в течении определенного периода времени. При моделировании задачи инвестора мы будет рассматривать разные выпуски ГКО как разные ценные бумаги, поэтому задача отдельного инвестора, как и функционирование рынка в целом, будет строиться нами в форме динамической модели.

Так как у каждого ГКО обязательно есть моменты выпуска и погашения, то задачу каждого инвестора можно рассматривать как задачу оптимального управления финансовыми потоками.

Рассмотрим рынок ГКО с k выпусками и n инвесторами, функционирующий на конечном интервале времени $[0, T]$. Каждый выпуск *j* генерирует разбиение этого отрезка точками t^j и τ^j, где t^j - момент выпуска ГКО вида *j*, а τ^j - момент его погашения. Обозначим его Δ^j $(j=1\ldots k)$.

Наложение всех Δ^j на отрезок $[0, T]$ порождает новое разбиение:

$$\Delta = \left\{0 = t^1 < t^2 < \ldots . < t^k < \tau^1 < \tau^2 < \ldots . < \tau^k = T\right\}$$

Для простоты будем считать, что все моменты выпуска (t^j) опережают все моменты погашения (τ^j), а также из $t^j < t^l$ следует $\tau^j < \tau^l$.

Портфелем ГКО инвестора *i* в момент $t \in \Delta$ назовем любой вектор $x_i^t = \left(x_{i1}^t, \ldots ., x_{ik}^t\right)$, где

1) $x_{ij}^t \geq 0, \quad \sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij}^t = 1,$

2) $x_{ij}^t = \begin{cases} \xi_{ij}^t > 0, t \in (t^j, \tau^j] \\ 0, \textit{в противном случае} \end{cases}$

Здесь x_{ij}^t - доля средств, вкладываемых инвестором *i* в выпуск *j* в момент *t*.

В момент времени $t = t^1 = 0$ все инвесторы имеют одинаковую структуру своих портфелей: $x_i^{t^1} = \left(1, 0, \ldots, 0\right)$. Далее, последовательно для соответствующих моментов t^j выпуска, имеем:

$$x_i^{t^2} = \left(x_{i1}^{t^2}, x_{i2}^{t^t}, 0, \ldots, 0\right),$$

$$x_i^{t^3} = \left(x_{i1}^{t^3}, x_{i2}^{t^3}, x_{i3}^{t^3}, 0, \ldots, 0\right), \ldots,$$

$$x_i^{t^k} = \left(x_{i1}^{t^k}, \ldots ., x_{ik}^{t^k}\right).$$

Начиная с первого момента τ^1 погашения ГКО вплоть до момента τ^{k-1} , имеем:

$$x_i^{\tau^1} = \left(0, x_{i2}^{\tau^1}, \ldots ., x_{ik}^{\tau^1}\right),$$

$$x_i^{\tau^2} = \left(0, 0, x_{i3}^{\tau^2}, \ldots ., x_{ik}^{\tau^2}\right), \ldots .,$$

$$x_i^{\tau^{k-2}} = \left(0, \ldots, 0, x_{ik-1}^{\tau^{k-2}}, x_{ik}^{\tau^{k-2}}\right),$$

$$x_i^{\tau^{k-1}} = \left(0, \ldots, 0, 1\right).$$

В момент $t = \tau^j = T$ $\quad x_i^{\tau^k} = \left(0, \ldots, 0\right)$, так как к этому моменту будут погашены все выпуски.

Таким образом, портфель инвестора *i* в произвольный момент до наступления первого момента погашения имеет вид:

$$x_i^{t^j} = \left(x_{i1}^{t^j}, \ldots ., x_{ij}^{t^j}, 0, \ldots, 0\right), \; t^j \in \Delta, \; j = 1, \ldots, k,$$

а после выпуска всех видов ГКО –

$$x_i^{\tau^j} = \left(0, \ldots, 0, x_{ij+1}^{\tau^j}, \ldots, x_{ik}^{\tau^j}\right), \; \tau^j \in \Delta, \; j = 1, \ldots, k.$$

Изменение портфеля ГКО инвестора *i* происходит в дискретные моменты $t \in \Delta$ и описывается уравнениями:

$$x_{ij}^t = x_{ij}^{t-1} + u_{ij}^t, \; x_{ij}^t \in R^k, \; t \in \Delta, \; j = 1, .., k, \quad (1)$$

с начальным состоянием

$$x_i^0 = \left(1, 0, .., 0\right), \quad (2)$$

где u_{ij}^t - управление в момент *t*, удовлетворяет условиям:

$$-x_{ij}^{t-1} \leq u_{ij}^t \leq 1 - x_{ij}^{t-1}, \; t \in \left[t^j, \tau^j\right], \; j = 1, .., k, \quad (3)$$

причем в момент времени τ^j левое неравенство заменяется строгим равенством $u_{ij}^{\tau^j} = -x_{ij}^{\tau^j - 1}$.

Обозначим через

$$U_i^t = \left\{ u_i^t \in R^k \left| \begin{array}{l} -x_{ij}^{t-1} \leq u_{ij}^t \leq 1 - x_{ij}^{t-1}, \\ \sum\limits_{j=1}^{k} u_{ij}^t = 0, t = \in \left[t^j, \tau^j\right], \\ u_{ij}^{\tau^j} = -x_{ij}^{\tau^j - 1}, j = 1, .., k \end{array} \right. \right\}$$

- множество всех допустимых управлений инвестора *i* в момент времени $t \in \Delta$, а через

$$U_i^{[0,T]} = \prod_{t\in\Delta} U_i^t$$

- множество последовательностей вида

$$u_i(\cdot) = \ = \left\{u_i^{t^1},...,u_i^{t^k},u_i^{\tau^1},...,u_i^{\tau^k}\right\}.$$

Фазовые ограничения описываются соотношениями:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}^t = 1, \quad t\in\Delta, \ . & (4) \\ x_{ij}^t K_i^t \le \alpha_{ij}^t a_j p_j^t, \quad 0 \le \alpha_{ij}^t \le 1, \quad t\in\Delta, & (5) \\ x_{ij}^t \ge 0, \quad t\in\Delta, \quad j=1,..,k. & (6) \end{cases}$$

(здесь a_j - количество ГКО выпуска j; p_j^t - рыночная цена ГКО выпуска j в момент t, коэффициент α_{ij}^t - верхняя граница инвестирования; K_i^t - инвестиционный фонд инвестора i в момент t).

Введем в рассмотрение функции:

$$q^{\tau^j}\left(u^{\tau^j}\right) = m_j^{\tau^j} x_{ij}^{\tau^j}, \ g^{t^j}\left(u^{t^j}\right) = m_j^{t^j} x_{ij}^{t^j},$$

где m_j^t - ожидаемое значение доходности ГКО выпуска j в момент t. Функции q^{τ^j} и g^{t^j} оценивают управление с точки зрения оттока и притока доходности соответственно.

Функция q^{τ^j} определена на множестве $U_i^{\tau^1}\times...\times U_i^{\tau^j}$, а функция g^{t^j} - на множестве $U_i^{t^1}\times...\times U_i^{t^j}$. Действительно, подставляя в эти функции выражения для $x_{ij}^{\tau^j}$ и $x_{ij}^{t^j}$, из уравнения движения (1) имеем:

$$q^{\tau^j}\left(u^{\tau^j}\right) = m_j^{\tau^j} x_{ij}^{\tau^j} = m_j^{\tau^j}\left(x_{ij}^0 + \sum_{\vartheta=\tau^1}^{\tau^j} u_{ij}^{\vartheta}\right),$$

$$g^{t^j}\left(u^{t^j}\right) = m_j^{t^j} x_{ij}^{t^j} = m_j^{t^j}\left(x_{ij}^0 + \sum_{\vartheta=t^1}^{t^j} u_{ij}^{\vartheta}\right).$$

С учетом потокового характера оттока и притока средств по ГКО, в качестве критерия, оценивающего портфель инвестора, мы будем рассматривать величину:

$$J_i\left(x_i^0,u_i\right) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{\vartheta\in\Delta}\left[\frac{q^{\vartheta}\left(u^{\vartheta}\right) - g^{\vartheta}\left(u^{\vartheta}\right)}{(1+\gamma)^{\vartheta}}\right] \to \max \tag{7}$$

которая в актуарной математике называется внутренней нормой доходности.

Здесь $u_i(\cdot) = \left\{u_i^{t^1},\dots,u_i^{t^k},u_i^{\tau^1},\dots,u_i^{\tau^k}\right\}$, где $u_i^{\vartheta} = \left(u_{i1}^{\vartheta},\dots,u_{ik}^{\vartheta}\right)$, а $(1+\gamma)^{-\upsilon}$ - дисконтирующий множитель (γ - безрисковая ставка). Величина, стоящая в числителе дроби, интерпретируется как суммарный поток в момент времени ϑ в терминах доходности.

Динамическую модель (1)-(7) инвестора i обозначим символом $Q_i^{[0,T]}$.

Каждому допустимому управлению $u_i(\cdot)\in U_i^{[0,T]}$ соответствует (в силу системы (1)-(2)) последовательность

$$x_i(\cdot) = \left\{x_i^{t^1},...,x_i^{t^k},x_i^{\tau^1},...,x_i^{\tau^k}\right\}$$

допустимых портфелей, которую будем называть допустимой траекторией инвестора i в модели $Q_i^{[0,T]}$.

Совокупность

$$Q^{[0,T]} = \left\langle N, \ \left\{Q_i^{[0,T]}\right\}_{i\in N}\right\rangle, \tag{8}$$

где $N = \{1,\dots,n\}$, будем называть динамической моделью рынка ГКО.

Допустимую траекторию будем называть удовлетворяющей условию замкнутости рынка $Q^{[0,T]}$, если ее компоненты удовлетворяют условию:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^t K_i^t = a_i\, p_i^t, \ \text{j=1,...,k}, \ t\in\Delta. \tag{9}$$

Обозначим $D_i^t\left(x^0\right)$ множество всех допустимых портфелей инвестора в момент $t\in\Delta$, описываемых соотношениями (4)-(6). Введем множество

$$D_i^{[0,T]}\left(x^0\right) = \prod_{t\in\Delta} D_i^t\left(x^0\right)$$

всех последовательностей

$$x_i(\cdot) = \left\{x_i^{t^1},...,x_i^{t^k},x_i^{\tau^1},...,x_i^{\tau^k}\right\}$$

портфелей (траекторий) на отрезке [0,T] инвестора i.

Лемма. Если для всех *i=1,...,n* выполнено условие

$$K^i \le \max_{\gamma\in\Gamma^i}\sum_{j=1}^{k}\gamma_j a_j p_j, \tag{10}$$

где

$$\Gamma^i = \left\{\gamma\in R^k \middle| 0\le\gamma_j\le\alpha_j^i, j=1,\dots,k\right\},$$

то множество $D^t\left(x^0\right) = \bigcap_{i\in N} D_i^t\left(x^0\right)$ непусто, компактно и выпукло.

Введем в рассмотрение множество $D^{[0,T]}\left(x^0\right) = \prod_{t\in\Delta} D^t\left(x^0\right)$. Содержательно оно является множеством допустимых для любого инвестора траекторий. Очевидно, что это множество обладает теми же свойствами, что и множество $D^t\left(x^0\right)$, т.е. является непустым, выпуклым и компактным множеством. Заметим, что $D^{[0,T]}\left(x^0\right)$ является подмножеством пространства R^{2k^2}.

Последовательность

$$\overline{u}_i(\cdot)=\left\{\overline{u}_i^{t^1},...,\overline{u}_i^{t^k},\overline{u}_i^{\tau^1},....,\overline{u}_i^{\tau^k}\right\}\in U_i^{[0,T]}$$

назовем оптимальным управлением инвестора i, если

$$\overline{J}_i=J_i\left(x_i^0,\overline{u}_i(\cdot)\right)=\max_{u_i(\cdot)\in U_i^{[0,T]}}J_i\left(x_i^0,u_i(\cdot)\right).$$

Теорема 1. В задаче $Q_i^{[0,T]}$ инвестора *i* существует оптимальное управление.

Доказательство. Так как функции q^t,g^t линейны по u, то функционал качества J_i является непрерывной по u функцией на множестве $U_i^{[0,T]}$. С другой стороны, из вида множеств U_i^t, $t\in\Delta$ (множество U_i^t является параллелепипедом), следует компактность множества $U_i^{[0,T]}$, поэтому оптимальное управление $\overline{u}_i(\cdot)$ в задаче $Q_i^{[0,T]}$ существует. Теорема доказана.

По определению ГКО как ценной бумаги, ее эмитентом является государство, которое, выпуская краткосрочные облигации, преследует свои конкретные цели, поэтому можно говорить об определенных предпочтениях с его стороны по поводу распределения различных выпусков ГКО, производимых на всем интервале времени $[0,T]$. Государство, как эмитент, заинтересовано в полном распределении каждого выпуска ГКО, а инвесторы заинтересованы, как и на других рынках ценных бумаг, в максимальной доходности своих портфелей (с учетом отсутствия риска). Для формализации такого рода предпочтений участников рынка ГКО, исследуем понятие эффективных портфелей на рынке ГКО с применением принципа оптимальности по Парето.

На рынке $Q^{[0,T]}$ каждой паре $\left(x^0,u(\cdot)\right)$, где

$$x^0\in R^{2k^2},\ u(\cdot)\in U_1^{[0,T]}\times\ldots\times U_n^{[0,T]}$$

поставим в соответствие вектор:

$$H\left(x(\cdot)\right)=J\left(x^0,u(\cdot)\right)=$$
$$=\left(J_1\left(x^0,u_1(\cdot)\right),...,J_n\left(x^0,u_n(\cdot)\right)\right)$$

(определен на множестве $D^{[0,T]}\left(x^0\right)$).

Введем понятие эффективных (оптимальных по Парето) векторов $H\left(x(\cdot)\right)$ на множестве $D^{[0,T]}\left(x^0\right)$.

Последовательность $x^p(\cdot)\in D^{[0,T]}\left(x^0\right)$ называется эффективной (оптимальной по Парето) последовательностью портфелей ГКО на рынке $Q^{[0,T]}$, если не существует $x(\cdot)\in D^{[0,T]}\left(x^0\right)$ такой, что $H_i\left(x(\cdot)\right)\ge H_i\left(x^p(\cdot)\right)$ для всех $i=1\ldots n$, причем хотя бы одно из этих неравенств строгое.

Обозначим множество эффективных последовательностей на рынке $Q^{[0,T]}$ через $P^{[0,T]}\left(x^0\right)$.

Введем $2k^2$-мерные векторы:

$$\overline{H}^1=\left(\overline{J}^1,0,\ldots,0\right),\ \overline{H}^2=\left(0,\overline{J}^2,0,\ldots,0\right),\ ....,$$
$$\overline{H}^n=\left(0,\ldots,0,\overline{J}^n\right).$$

Содержательно вектор $\overline{H}^i$ есть "крайняя" точка множества

$$\left\{\left(J^1,...,J^{i-1},\overline{J}^i,J^{i+1},...,J^n\right)\middle|\ \begin{matrix}J^k=J^k\left(x^0,u_k(\cdot)\right),\\ u_k\in U_k^{[0,T]},(k\ne i)\end{matrix}\right\}$$

в каждой точке которого инвестор *i* имеет максимальную доходность своего портфеля. Назовем $\overline{H}^i$ целевой точкой инвестора *i*.

Обозначим

$$H^{[0,T]}\left(x^0\right)=\left\{H\left(x(\cdot)\right)\middle|x(\cdot)\in D^{[0,T]}\left(x^0\right)\right\}.$$

Это есть критериальное пространство, соответствующее множеству траекторий $D^{[0,T]}\left(x^0\right)$. Введем в рассмотрение выпуклую комбинацию $\widehat{H}$ векторов $\overline{H}^1,\ldots,\overline{H}^n$:

$$\widehat{H}=conv\left\{\overline{H}^1,...,\overline{H}^n\right\}.$$

Под ортогональной проекцией z^* вектора $z\in R^{2k^2}$ на множество $H^{[0,T]}\left(x^0\right)$ будем понимать точку:

$$z^*=\pi_{H^{[0,T]}\left(x^0\right)}z=\min_{y\in H^{[0,T]}\left(x^0\right)}\left\|z-y\right\|.$$

Заметим, что для всех $z\in H^{[0,T]}\left(x^0\right)$, $z^*=z$ и по определению для любого $A\subset R^{2k^2}$

$$\pi_{H^{[0,T]}\left(x^0\right)}A=\left\{z^*=\pi_{H^{[0,T]}\left(x^0\right)}z\middle|z\in A\right\}.$$

Для фиксированной точки $\overline{H}^i\subset R^{2k^2}$ на множестве $H^{[0,T]}\left(x^0\right)$ определим функцию (расстояние):

$$F_i\left(x(\cdot)\right)=-\rho\left(H,\overline{H}^i\right)=-\left\|H-\overline{H}^i\right\|$$

(i=1,...,n),

где $H=H\left(x(\cdot)\right)\in H^{[0,T]}\left(x^0\right)$.

По построению множество $H^{[0,T]}\left(x^0\right)$, как и множество $D^{[0,T]}\left(x^0\right)$, выпукло и компактно.

Исследуем структуру множества $P^{[0,T]}\left(x^0\right)$ эффективных последовательностей портфелей при различных взаимоположениях множеств $H^{[0,T]}\left(x^0\right)$ и $\widehat{H}$ в пространстве R^{2k^2}.

Рассмотрим сначала случай, когда целевые точки в принципе не достижимы ни одним из инвесторов. Это математически означает, что либо $\widehat{H}\bigcap H^{[0,T]}\left(x^0\right)=\varnothing$, либо $H^{[0,T]}\left(x^0\right)\subset\widehat{H}$, поэтому становится целесообразным рассмотрение множества эффективных последовательностей портфелей, как объекта потенциально реализуемых оптимальных последовательностей портфелей. Сначала рассмотрим случай $\widehat{H}\bigcap H^{[0,T]}\left(x^0\right)=\varnothing$.

Теорема 2. Пусть $\widehat{H}\bigcap H^{[0,T]}\left(x^0\right)=\varnothing$. Тогда $P^{[0,T]}\left(x^0\right)=\pi_{H^{[0,T]}\left(x^0\right)}\widehat{H}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\widehat{H}\subset H^{[0,T]}\left(x^0\right)$. В этом случае целевые точки находятся в пределах достижимости, однако, ввиду условия замкнутости рынка, не могут быть достигнуты одновременно всеми инвесторами. Следовательно, и в этом случае имеет смысл исследовать множество эффективных последовательностей портфелей.

Теорема 3. Пусть $\widehat{H}\subset H^{[0,T]}\left(x^0\right)$. Тогда

$$P^{[0,T]}\left(x^0\right)=\left\{H(x(\cdot))\middle|\quad x\in\pi_{H^{[0,T]}\left(x^0\right)}\widehat{H}=\widehat{H}\right\}.$$

Теорема 4. Пусть точки $\overline{H}^1,\ldots,\overline{H}^n$ расположены так, что $H^{[0,T]}\left(x^0\right)\subset\widehat{H}$. Тогда

$$P^{[0,T]}\left(x^0\right)=\left\{H(x(\cdot))\middle|\quad x\in\pi_{H^{[0,T]}\left(x^0\right)}\widehat{H}=H^{[0,T]}\left(x^0\right)\right\}$$

Рассмотрим общий случай расположения точек $\overline{H}^1,\ldots,\overline{H}^n$ относительно $H^{[0,T]}\left(x^0\right)$.

Пусть существует такое разбиение $\delta=\left(N_1,N_2\right)$ множества

$$N\quad\left(N_1\bigcup N_2=N,\quad N_1\bigcap N_2=\varnothing\right),$$

что

$$N_1=\left\{i\in N\middle|\overline{H}^i\in H^{[0,T]}\left(x^0\right)\right\},$$
$$N_2=\left\{i\in N\middle|\overline{H}^i\notin\overline{H}^{[0,T]}\left(x^0\right)\right\}.$$

Теорема 5. Множество эффективных на рынке $Q^{[0,T]}$ последовательностей портфелей ГКО имеет следующую структуру:

$$\pi_{H^{[0,T]}}\widehat{H}=\left\{\widehat{h}\in H^{[0,T]}\middle|\quad\widehat{h}=\pi_{H^{[0,T]}}h,\quad h\in\widehat{H}\right\}.$$

Доказательство. При $N_1=\varnothing$ мы находимся в условиях теорем 2 или 4 соответственно, когда $\widehat{H}\cap H^{[0,T]}\left(x^0\right)=\varnothing$ или $H^{[0,T]}\left(x^0\right)\subset\widehat{H}$ (здесь остается еще случай $\overline{H}^i\notin\overline{H}^{[0,T]}\left(x^0\right)$, $H^{[0,T]}\left(x^0\right)\not\subset\widehat{H}$, $H^{[0,T]}\left(x^0\right)\bigcap\widehat{H}\neq\varnothing$); если $N_2=\varnothing$, то $\overline{H}^i\subset H^{[0,T]}\left(x^0\right)$ и мы находимся в условиях теоремы 3.

Будем считать, что $N_1,N_2\neq\varnothing$. Введем обозначения

$$\widehat{H}_1=\widehat{H}\cap H^{[0,T]}\left(x^0\right),\quad\widehat{H}_2=\widehat{H}\setminus\widehat{H}_1,$$

тогда

$$\pi_{H^{[0,T]}\left(x^0\right)}\widehat{H}=\widehat{H}_1\bigcup\pi_{H^{[0,T]}\left(x^0\right)}\widehat{H}_2.$$

Пусть

$$y'\in\pi_{H^{[0,T]}\left(x^0\right)}\widehat{H},\quad x\in H^{[0,T]}\left(x^0\right),\quad x\neq y'.\quad(11)$$

Нужно показать, что

$$F_i\left(y'\right)>F_i(x)\ \text{хотя бы для одного}\ i\in N.\quad(12)$$

Для этого рассмотрим два случая.

1. $y'\in\widehat{H}_1$. В данном случае доказательство неравенства (12) проводится аналогично доказательству теоремы 3.

2. $y'\in\pi_{H^{[0,T]}\left(x^0\right)}\widehat{H}\setminus\widehat{H}_1=\pi_{H^{[0,T]}\left(x^0\right)}\widehat{H}_2$. Тогда для любых x из (11) и $y'\in Y$, где

$$Y=\left\{y\in\widehat{H}_2\middle|\quad\pi_{H^{[0,T]}\left(x^0\right)}y=y'\right\},$$

выполняется неравенство $\rho\left(y',y\right)<\rho\left(x,\overline{y}\right)$, поэтому неравенство (12) вытекает из леммы 2.1 (см. [1]).

Итак, множество $\pi_{H^{[0,T]}\left(x^0\right)}\widehat{H}$ состоит только из точек, удовлетворяющих условию (12).

Покажем, что кроме точек множества $\pi_{H^{[0,T]}\left(x^0\right)}\widehat{H}$ во множестве $H^{[0,T]}\left(x^0\right)$ нет точек, обладающих свойством (12), т.е. что для любых

$$x\in H^{[0,T]}\left(x^0\right)\setminus\pi_{H^{[0,T]}\left(x^0\right)}\widehat{H}$$

найдется такая точка $\widetilde{y}\in\pi_{H^{[0,T]}\left(x^0\right)}\widehat{H}$,

где $\rho\left(\widetilde{y},\overline{H}^i\right)<\rho\left(x,\overline{H}^i\right)$ для всех $i=1,\ldots,n$.

Рассмотрим множество

$$\widehat{H}_3=conv\,\pi_{H^{[0,T]}\left(x^0\right)}\widehat{H}.$$

По лемме 2.1 (см. [1]) для любых $x\in H^{[0,T]}\left(x^0\right)\setminus\widehat{H}_3$ существует точка $\widetilde{y}=\pi_{\widehat{H}_3}\widehat{H}_3$ такая, что

$$\rho\left(\widetilde{y},\overline{H}^i\right)<\rho\left(x,\overline{H}^i\right)\ \text{для всех}\ i=1,\ldots,n.$$

Пусть теперь

$$x\in\left(\widehat{H}_3\setminus\pi_{H^{[0,T]}\left(x^0\right)}\widehat{H}\right).$$

Если $\pi_{\widehat{H}} x \in \widehat{H}_1$, то точка $\widetilde{y}$ - искомая точка (см. лемму 2.10 в [1]), т.е. $\widetilde{y} = \pi_{\widehat{H}} x$. Если же $\pi_{\widehat{H}} x \in \widehat{H}_2$, то $\pi_{\widehat{H}} x \notin \pi_{H^{[0,T]}(x^0)} \widehat{H}$, но существует точка

$$x' \in \left(\pi_{H^{[0,T]}(x^0)} \widehat{H}_2 \cap \omega_\lambda\right),$$

где $\omega_\lambda = \lambda x + (1-\lambda)\pi_{\widehat{H}} x, \quad \lambda \in [0,1]$ и по лемме 2.10 (см. [1])

$$\rho\left(x', \overline{H}^i\right) < \rho\left(x, \overline{H}^i\right) \text{ для всех i=1,...,n,}$$

т.е. x' есть искомая точка $\widetilde{y}$ (в случае, когда $\overline{H}^i \notin \overline{H}^{[0,T]}(x^0)$, $H^{[0,T]}(x^0) \not\subset \widehat{H}$, $H^{[0,T]}(x^0) \cap \widehat{H} \neq \varnothing$, доказательство аналогично теореме 3.). Теорема доказана.

Приведенные теоремы дают конструктивный способ построения множества эффективных последовательностей портфелей при различных положениях точек $\overline{H}^1, \dots, \overline{H}^n$ относительно множества $H^{[0,T]}(x^0)$.

Ввиду нежесткости условий, определяющих эффективные портфели, такое множество существует почти всегда. Исходя из теории многокритериальной оптимизации, можно заметить, что эффективный (оптимальный по Парето) портфель является точкой максимума свертки n критериев, поэтому вопрос существования эффективных портфелей сводится к известной теореме Вейерштрасса, условия которой для рынка $Q^{[0,T]}$ выполнены.

Остановимся на вопросе о динамической устойчивости множества эффективных последовательностей портфелей на рынке $Q^{[0,T]}$.

Из определения динамическая устойчивость вектора $H\left(x^p(\cdot)\right) \in P^{[0,T]}(x^0)$ означает, что

$$H\left(x^p(\cdot)\right) \in \bigcap_{t\in\Delta} \left[H\left(x^p(\cdot)\big|_{[0,t]}\right) + P^{[t,T]}\left(x^p(t)\right)\right],$$

где $P^{[T,T]}\left(x^p(T)\right)$ - единственная эффективная последовательность портфелей в момент времени $t = T$.

Пусть $x^p(\cdot) \in D^{[0,T]}(x^0)$ - траектория такая, что $H\left(x^p(\cdot)\right) \in P^{[0,T]}(x^0)$. Траектория $x^p(\cdot)$ есть эффективная последовательность портфелей.

Вдоль $x^p(\cdot)$ определим вектор

$$H\left(x^p(\cdot)\big|_{[t,T]}\right) = J\left(x^p(\cdot), u^p(\cdot)\big|_{[t,T]}\right).$$

Из теории оптимального управления известно, что для $x^p(\cdot) \in D^{[0,T]}(x^0)$ выполняется включение:

$$\left[x^p(\cdot)\big|_{[0,t]} + D^{[t,T]}\left(x^p(t)\right)\right] \subset D^{[0,T]}(x^0), \text{ для каждого } t \in \Delta. \tag{13}$$

Из (13) получаем, что в любой момент времени $t \in \Delta$ $x^p(\cdot)\big|_{[t,T]} \in D^{[t,T]}\left(x^p(t)\right)$. Это означает, что

$$H\left(x^p(\cdot)\big|_{[t,T]}\right) \in P^{[t,T]}\left(x^p(t)\right).$$

Прибавляя к обеим частям последнего соотношения вектор $H\left(x^p(\cdot)\big|_{[0,t]}\right)$, получим:

$$H\left(x^p(\cdot)\right) \in \left[H\left(x^p(\cdot)\big|_{[0б\,]}\right) + P^{[t,T]}\left(x^p(t)\right)\right],$$

так как последнее соотношение верно для любого $t \in \Delta$, то

$$H\left(x^p(\cdot)\right) \in \bigcap_{t\in\Delta} \left[H\left(x^p(\cdot)\big|_{[0,t]}\right) + P^{[t,T]}\left(x^p(t)\right)\right].$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 6. Множество $P^{[0,T]}(x^0)$ эффективных последовательностей портфелей на рынке $Q^{[0,T]}$ обладает свойством динамической устойчивости.

Это утверждение содержательно означает, что политика инвесторов, направленная на формирования эффективных портфелей, является содержательной на протяжении всего инвестиционного периода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петросян Л. А., Данилов Н. Н.* Кооперативные дифференциальные игры и их приложения. - Томск: Изд-во ТГУ, 1985. - 276 С.
2. *Буренин А. Н.* Рынок ценных бумаг и производных финансовых инструментов. - М.: 1 Федеративная Книготорговая Компания, 1998. – 356 С.
3. *Ван Хорн Дж.* Основы управления финансами. -М.: Финансы и статистика, 1996. – 867 С.
4. *Миркин Я. М.* Ценные бумаги и фондовый рынок. - М.: Наука, 1995. – 657 С.
5. *Шарп У.* Инвестиции / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бейли. - М.: Инфра-М, 1999. – 1024 С.