

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 622.235(088.8): 519.21

Д.Ю. Сирота

ПОВЫШЕНИЕ СКОРОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ

В теоретической электроразведке имеется задача о расчете потенциала и напряженности точечного источника, расположенного в слоистой однородной, изотропной среде с плоскопараллельными границами.

В качестве примера рассмотрим трехслойную среду, при этом источник будет расположен в первом нижнем слое. Как известно [1], решение такой задачи для потенциала в точке наблюдения, расположенной в третьем слое (атмосфере), имеет вид:

$$\varphi_3 = \frac{\rho_2 I}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - K_{12}) \exp(-mz) J_0(mr)}{1 + K_{12} \exp(-2mh)} dm \quad (1)$$

где ρ_2 – удельное электросопротивление второго

слоя ($\Omega \cdot m$); $K_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$ – коэффициент от-

ражения второго слоя; $J_0(mr)$ – функция Бесселя нулевого порядка; I – ток точечного источника; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – полярный радиус; h – толщина второго слоя.

Традиционное решение на основе интеграла (1) заключается в разложении функции $[1 + K_{12} \exp(-2mh)]^{-1}$ в ряд Тейлора по степеням $\exp(-2mh)$ и последующем применении формулы Вебера:

$$\int_0^{\infty} e^{-mz} J_0(mr) dm = \sqrt{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

В результате таких преобразований, получается следующее выражение:

$$\varphi_3 = \frac{\rho_2 I}{2\pi} (1 - K_{12}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K_{12})^n}{\sqrt{r^2 + (2nh + z)^2}} \quad (2)$$

Представление (2) имеет ряд недостатков. Анализу и попытке преодоления некоторых из них посвящена данная заметка.

Прежде чем переходить к обсуждению проблемы, необходимо заметить, что представление (2) является выгодным для дальнейшего физического анализа задачи. А именно, позволяет вычислять потенциал и напряженность объемных тел

различной конфигурации. Примером такого вычисления может служить работа [2].

Рассмотрим ряд (2) более подробно.

Первой особенностью данного числового ряда является то, что его можно представить как функциональный ряд степенного типа:

$$f(x) = \sum a_n x^n,$$

где

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (2nh + z)^2}},$$

вычисленного в точке $x = -K_{12}$. Как известно, степенные ряды такого вида сходятся в некотором интервале с центром в точке ноль, радиус которого вычисляется с помощью некоторого признака сходимости (например, Даламбера или Коши). В данном случае, по признаку Даламбера, радиус сходимости $R = 1$. На левой границе интервала сходимости $(-1; 1)$ ряд сходится по признаку Лейбница о знакочередующихся рядах, а в правой ряд расходится по предельному признаку сравнения. Расходимость ряда в точке $x = 1$ означает: чем ближе выражение $-K_{12}$ будет к единице, тем меньше будет скорость сходимости соответствующего числового ряда $f(-K_{12})$.

Второй особенностью данного числового ряда является то, что он является конечным результатом разложения в ряд Тейлора функции двух переменных

$$F(m, h) = \frac{1}{1 + K_{12} \exp(-2mh)}.$$

Так как при непосредственном вычислении значения ряда Тейлора используется многочлен Тейлора некоторой степени, то, вообще говоря, нельзя гарантировать, что аппроксимация функции $F(m, h) = [1 + K_{12} \exp(-2mh)]^{-1}$ многочленом Тейлора будет давать одну и ту же погрешность при одной и той же старшей степени аппроксимирующего многочлена для всех значений h .

Таким образом, возникают две задачи: нейтрализовать влияние величины h на точность ап-

проксимации функции $F(m,h)$ некоторым полиномом; найти способ более удачной аппроксимации функции $F(m,h)$ полиномами, чем разложение в ряд Тейлора.

Решение первой задачи заключается в следующем. Сделав в (1) замену $\bar{\Omega} = \Omega/h$, где под Ω подразумеваются координаты точки наблюдения, получим выражение:

$$\varphi_3 = \frac{\rho_2 I}{2\pi h} \int_0^\infty \frac{(1 - K_{12}) \exp(-pz) J_0(pr)}{1 + K_{12} \exp(-2p)} dp \quad (3)$$

Как видим, функция двух переменных $F(m,h)$ преобразовалась в функцию одной переменной: $F(p) = [1 + K_{12} \exp(-2p)]^{-1}$.

Решение второй задачи начинается с замены $x = \exp(-2p)$; тогда интервал $[0; \infty)$ преобразуется в $[0; 1]$, а сама функция примет вид: $F(x) = 1/(1 + K_{12}x)$.

Дальнейшему решению посвящены две работы: [3,4], в которых предлагается аппроксимировать указанную функцию линейной комбинацией полиномов Чебышева первого рода с последующим преобразованием к обыкновенному полиному:

$$F(x) \approx \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^N A_k T_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right) \approx \sum_{k=0}^N B_k x^k \quad (4)$$

Несмотря на теоретическую возможность такого представления, при численной реализации это вызывает некоторые затруднения. Так коэффициенты разложения

$$A_k = \left[2 \int_0^1 F(x) T_k(2x-1) dx \right] / \pi$$

здесь не вычисляются аналитически и для интегрирования необходимо применить какой-либо метод квадратур, заведомо вносящий погрешности. Обычно, в качестве такого метода используют метод трапеций в следующей форме:

$$A_k = \frac{2}{N+1} \sum_{j=0}^N F(u_j) \cos \frac{(2j+1)k\pi}{2N+2},$$

где $u_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{(2j+1)\pi}{2N+2}$, N – старшая степень аппроксимирующего полинома. Однако, как указано в [5], при таком вычислении наблюдается резкая потеря точности вычислений для второй половины коэффициентов A_k . Кроме того, коэффициенты A_k достаточно быстро стремятся к нулю, что приводит к потере знаков при преобразовании линейной комбинации полиномов Чебышева в стандартный полином.

Альтернативным способом является поиск аппроксиманта – полинома, доставляющего наилуч-

шее равномерное приближение на отрезке для заданной функции. Решению данной задачи посвящено достаточно много работ: теоретическое обоснование и практическое применение (библиография по данному вопросу представлена в [5], [6]).

Пусть R – пространство ограниченных вещественных функций, определенных на отрезке $[a,b]$ вещественной оси, с нормой $\|f\| = \sup_{[a,b]} |f(x)|$. Тогда полином Φ_n доставляет наилучшее приближение $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если $L = \sup_{[a,b]} |f(x) - \Phi_n|$ принимает наименьшее возможное значение.

Необходимые и достаточные условия того, что полином является полиномом наилучшего приближения для непрерывной функции, сформулированы в теоремах Валле – Пуссена и Чебышева.

Непосредственный поиск искомого полинома осуществляется по какому-либо итерационному алгоритму; в настоящее время достаточно широко используется так называемый алгоритм Ремеза (см. [5], [7]).

Таким образом, после применения первого или второго алгоритма получается некоторый аппроксимирующий полином, который формально отличается от полинома Тейлора только коэффициентами: $\alpha(n) = (-K_{12})^n$ заменяются на другие коэффициенты $\beta(n)$, вычисленные по алгоритму Ремеза или по формулам (4).

$$\varphi_3 = \frac{\rho_2 I}{2\pi h} (1 - K_{12}) \sum_{n=0}^N \frac{\beta(n)}{\sqrt{r^2 + (2n+z)^2}}. \quad (5)$$

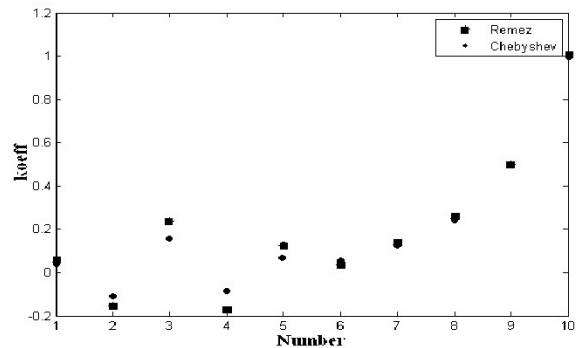
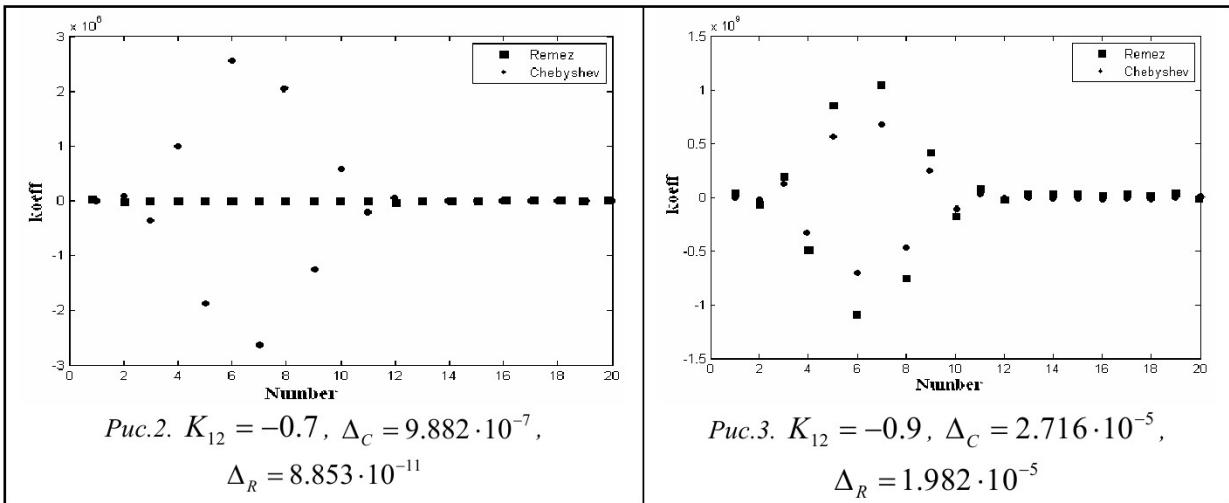


Рис.1. $K_{12}=-0.5$, $\Delta_C = 4.429 \cdot 10^{-7}$,

$$\Delta_R = 7.198 \cdot 10^{-8}$$

Алгоритм минимаксной аппроксимации Ремеза был взят в форме готовой программной реализации с сайта алгоритмов www.Netlib.org и модифицирован под конкретную функцию и отрезок. Отличительная особенность алгоритма Ремеза заключается в циклическом колебании амплитуды разности $\Delta(x) = F(x) - P_n(x)$, что может служить визуальным критерием правильности ап-



проксимации.

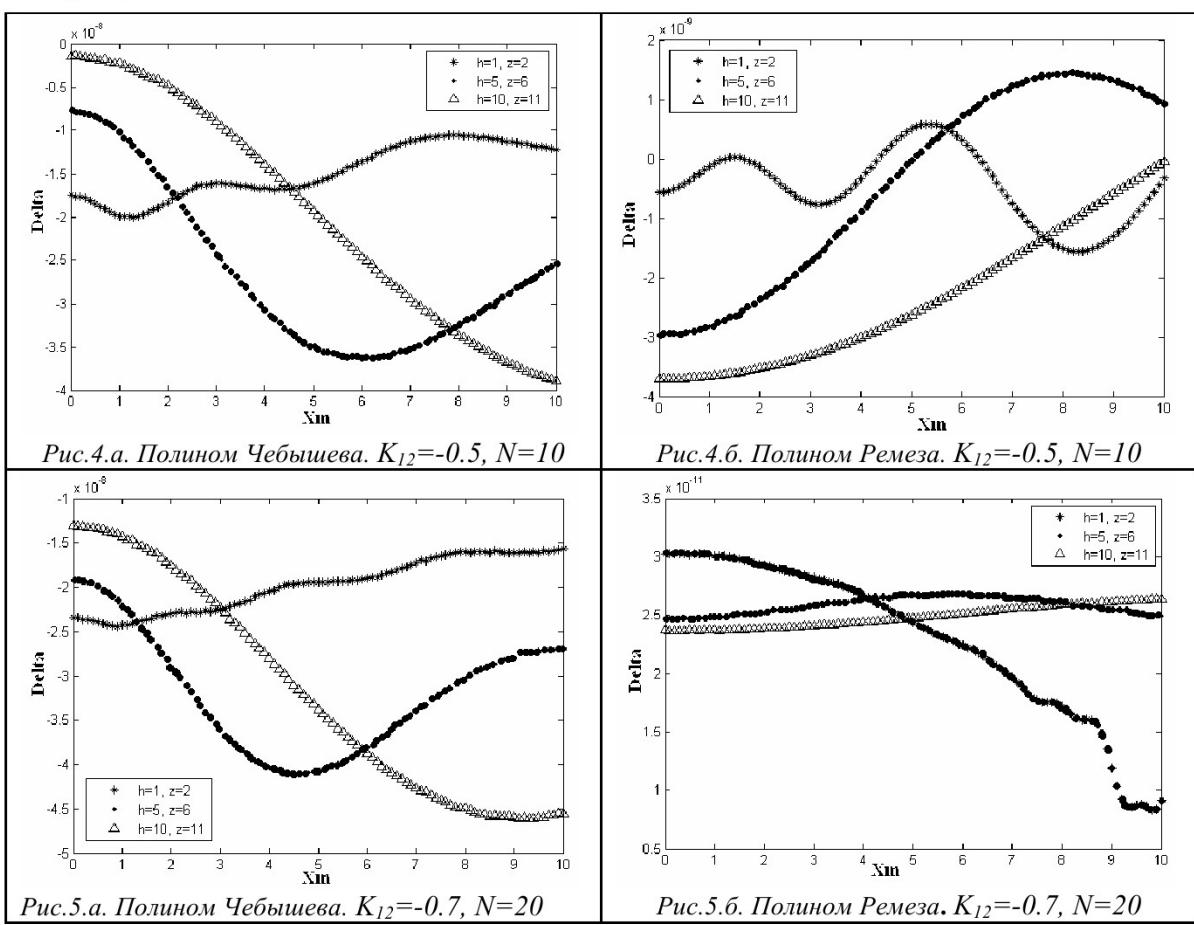
Алгоритм вычисления коэффициентов в разложении по полиномам Чебышева с последующим преобразованием в стандартный полином был написан автором.

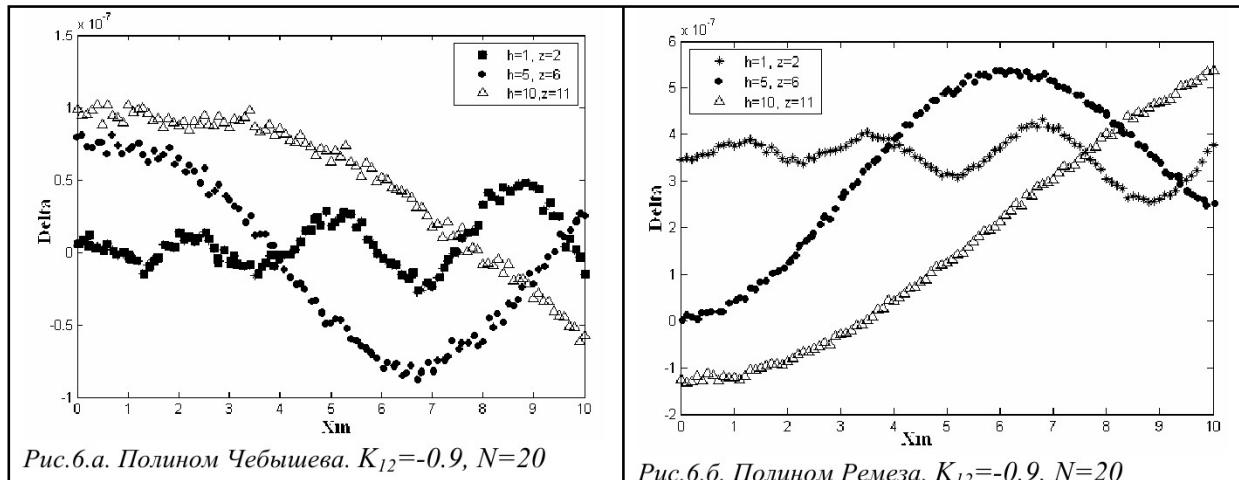
На рис. 1–3 приведем значения коэффициентов аппроксимирующих полиномов для функции $F(x) = 1/(1 + K_{12}x)$ для значений $K_{12} = \{-0.5; -0.7; -0.9\}$, а также значение абсолютной погрешности аппроксимации.

Можно заметить, что при определенном сочетании функции и старшей степени полинома ко-

эффициенты, вычисленные по разным алгоритмам, практически совпадают. Значения коэффициентов, представленных на рис.2., различаются примерно на три порядка, однако совпадают по структуре распределения. Кроме того, абсолютная погрешность аппроксимации для полинома Ремеза понижается с увеличением старшей степени полинома (рис.2.), что соответствует теореме Вейерштрасса о связи погрешности ε и старшей степени полинома.

Приведем сравнительный анализ погрешностей вычисления значений потенциала по форму-





лам (1) и (5). При этом интеграл (1) будем вычислять следующим образом: взяв произвольно первоначальный отрезок интегрирования $[0; x_1]$, построим последовательность отрезков вида $[x_{i-1}; x_i]$ длиной в два раза больше предыдущего. Каждый из отрезков разделим на 10 подотрезков, на каждом из которых будем производить интегрирование по адаптивной квадратурной формуле Гаусса–Лобатто. Продолжим вычисления до тех пор, пока значение интеграла на очередном отрезке не станет по модулю меньше, чем некоторое $\varepsilon = 10^{-20}$, затем значения интегралов по каждому отрезку суммируем.

На рис. 4–6 приведены графики разностей между вычисленными значениями по формулам (1), (5), где коэффициенты $\beta(n)$ вычислялись по формулам (4) или по алгоритму Ремеза. При этом следующие условия считались неизменными: $x \in [0; 10]$, $y=0$, $h=1, 5, 10$, $z_i = h_i + 1$,

$$K_{12} = -0.5, -0.7, -0.9.$$

Подведем итоги исследований. Коэффициенты полинома Чебышева вычисляются проще и быстрее, однако весь полином Чебышева пригоден только для малых старших степеней аппроксимирующего полинома ($N \leq 10$): дальнейшее увеличение ведет к неадекватному поведению аппроксиманта. Коэффициенты полинома Ремеза вычисляются по более сложному и долгому алгоритму, однако аппроксимация полиномом Ремеза более адекватна теореме Вейерштрасса. Необходимо заметить, что увеличение старшей степени выше 20 приводит к нарушению равнамплитудного колебания разности $\Delta(x) = F(x) - P_n(x)$, однако сам алгоритм работает исправно. Данное обстоятельство связано, по-видимому, с недостаточно большим количеством верных цифр в числах: переход с двойной точности данных на уверенную, реализованную в современных версия языка Фортран, возможно, даст решение данной проблемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М. «Наука», 1972г. –732с.
2. Иванов. В.В., Сирота Д.Ю. Электромагнитные возмущения в атмосфере перед крупными сейсмическими событиями// Вестник КузГТУ 2006. Т 6.2. С. 3–8.
3. Конников И.А. Вычисление функции Грина для уравнения Лапласа//ЖТФ. 2007. Т 77. В.1.
4. Конников И. А. Вычисление квазистационарного поля в слоистой среде//ЖТФ. 2007. Т.77. В.4.
5. Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения. –К. Наукова думка, 1969 г. –625 с.
6. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. –М. Наука. 1977 г. –510 с.
7. Бахвалов Н. С. Численные методы. –М. Наука. 1973 г. –632 с.

□ Автор статьи:

Сирота
Дмитрий Юрьевич
-ст. преп. каф. прикладной
математики