УДК 514.76

Е.В. Кусова

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ТЕНЗОРА НЕЙЕНХЕЙСА НА СЛАБО КОСИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

Пусть M – нечетномерное ориентируемое гладкое многообразие, $X(M)$ – $C^\infty(M)$ –модуль гладких векторных полей, d – оператор внешнего дифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞.

Определение 1. [1] *Почти контактной метрической структурой (*короче *AC-структурой)* на M называется совокупность тензорных полей $(\Phi,\xi,\eta,g=\langle .,.\rangle)$, где:

Ф – тензор типа (1,1), называемый *структурным эндоморфизмом*;

ξ – *структурный вектор*;

η – ковектор, называемый *контактной формой*;

g=<…> – (псевдо) риманова метрика.

При этом:

1) $\eta(\xi)=1$;

2) $\Phi(\xi)=1$;

3) $\eta\circ\Phi=0$;

4) $\Phi^2=-id+\eta\otimes\xi$;

5) $\langle\Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\cdot\eta(Y)$,

где $X,Y\in X(M)$, id - тождественное преобразование.

Легко проверить, что тензор $\Omega(X,Y)=\langle X,\Phi Y\rangle$ кососимметричен, то есть является 2-формой на M. Этот тензор называется *фундаментальной формой структуры*.

Определение 3. *Слабо косимплектической структурой* (короче NC-структурой) называется почти контактная структура, для которой верно равенство

$$\nabla_X(\Phi)Y+\nabla_Y(\Phi)X=0, \qquad (1)$$

где $X,Y\in X(M)$.

Определение 4. *Многообразие*, на котором фиксирована слабо косимплектическая структура, называется *слабо косимплектическим.*

Слабо косимплектические структуры впервые, по-видимому, были рассмотрены Проппе [5], а затем систематически изучались Блэром [1], а затем Блэром и Шоуэрсом [6], которые впервые ввели также понятие точнейше косимплектической структуры. Понятие слабо косимплектической структуры является одним из наиболее интересных обобщений понятия косимплектической структуры и является контактным аналогом понятия приближенно келеровой структуры в эрмитовой геометрии.

Пусть $(\Phi,\xi,\eta,g=\langle .,.\rangle)$ – *AC*-структура на многообразии M^{2n+1}. В модуле $X(M)$ внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора

$$\mu=\eta\otimes\xi,\lambda=id-\mu=-\Phi^2,$$

и, таким образом,

$$X(M)=\Lambda\oplus\mathrm{M},$$

где $\Lambda=\mathbf{Im}\,\Phi=\mathbf{ker}\,\eta$, $\mathrm{M}=\mathbf{Im}\,\mathrm{M}$ – распределения размерностей $2n$ и 1 соответственно, называемые ***первым*** и ***вторым фундаментальными распределениями*** соответственно [2]. Очевидно, распределения Λ и M инвариантны относительно Φ и взаимно ортогональны. Очевидно также, что

$$\Phi^2=-id, g(\tilde\Phi X,\tilde\Phi Y)=g(X,Y), X,Y\in\Lambda,$$

где $\tilde\Phi=\Phi|_\Lambda$. Поэтому, если $p\in M$, то в касательном пространстве $T_p(M)$ можно построить ортонормированный репер

$$\{p,e_0,e_1,e_2,\dots,e_n,\Phi e_1,\dots,\Phi e_n\},$$

где $e_0=\xi_p$. Такой репер называется ***вещественно адаптированным репером***. С другой стороны, пусть $\Lambda^C=\Lambda\otimes C$ – комплексификация распределения Λ. В ней внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора

$$\sigma=\frac{1}{2}(id-\sqrt{-1}\Phi) \text{ и } \sigma=\frac{1}{2}(id+\sqrt{-1}\Phi)$$

на собственные подмодули $D_\Phi^{\sqrt{-1}}$ и $D_\Phi^{-\sqrt{-1}}$ эндоморфизма Φ, отвечающие собственным значениям $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$, соответственно. Следовательно, можно построить репер

$$\{p,\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n,\varepsilon_{\hat 1},\dots,\varepsilon_{\hat n}\}$$

комплексификации пространства $T_p(M)$, где

$$\varepsilon_0=\xi_p,\varepsilon_a=\sqrt{2}\sigma(e_a),\varepsilon_{\hat a}=\sqrt{2}\overline{\sigma}(e_a),$$
$$a=1,\dots,n,\hat a=a+n$$

состоящий из собственных векторов оператора Φ_p. Такой репер называется репером, ***адаптированным структуре***, или ***А-репером*** [3]. Легко видеть, что матрицы, состоящие из компонент тензоров Φ_p и g_p, в *А*-репере имеют вид, соответственно

$$(\Phi^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$$

где I_n – единичная матрица порядка n. Известно [2], [3], что совокупность таких реперов определяет G-структуру на M со структурной группой $\{1\}\times U(n)$, представленной матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & \overline{A} \end{pmatrix},$$

где $A \in U(n)$, $U(n)$ – унитарная группа порядка n. Эта G-структура называется ***присоединенной.***

Еще раз подчеркнем, что пространство присоединенной G-структуры состоит из комплексных реперов, т. е. реперов комплексификации соответствующих касательных пространств. Поэтому, даже имея дело с вещественными тензорами, мы, говоря об их компонентах на пространстве присоединенной G-структуры, подразумеваем компоненты комплексных расширений этих тензоров. В свою очередь, комплексный тензор является комплексным расширением вещественного тензора тогда и только тогда, когда он инвариантен относительно оператора комплексного сопряжения. Следуя общепринятой традиции, будем называть такой тензор вещественным. В частности, сумма чистого комплексного тензора и комплексно сопряженного ему тензора является вещественным тензором.

На протяжении всей работы будем подразумевать, что индексы, обозначаемые малыми буквами второй половины латинского алфавита: *i, j, k, l, m, r, s, t,…*– пробегают значения от 0 до $2n$, а индексы, обозначаемые малыми буквами первой половины латинского алфавита: *a, b, c, d, e, f, g, h* – значения от 1 до n, и положим $\hat{a} = a + n$.

На пространстве присоединенной G-структуры равенство (1) равносильно соотношению

$$\Phi^i_{k,j} = -\Phi^i_{j,k}. \qquad (2)$$

Непосредственно вычисляется ***первая группа структурных уравнений*** NC-структуры вида:

$$d\omega^a = -\omega^a_b \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + \frac{3}{2}C^{ab}\omega_b \wedge \omega$$

$$d\omega_a = \omega^b_a \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + \frac{3}{2}C_{ab}\omega^b \wedge \omega \quad (3)$$

$$d\omega = C^{bc}\omega_b \wedge \omega_c + C_{bc}\omega^b \wedge \omega^c$$

Заметим, что системы функций определяют тензоры B и C, называемые первым и вторым структурными тензорами. Из определения слабо кососимплектических структур следует, что они кососимметричны.

Определение 4. Тензором Нейенхейса [1] называется тензор типа (1,2), определенный как

$$[\Phi\Phi](X,Y) = \Phi^2[X,Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \\ - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] \qquad (5)$$

Известно [1], что задание тензора Нейенхейса равносильно заданию четырех тензоров $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ и $N^{(4)}$, а именно:

$$N^{(1)}(X,Y) = [\Phi,\Phi](X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi$$
$$N^{(2)}(X,Y) = (L_{\Phi X}\eta)(Y) - (L_{\Phi Y}\eta)(X) \quad (6)$$
$$N^{(3)} = (L_\xi \Phi)X, \ N^{(4)} = (L_\xi\eta)X$$

Теорема. На всяком слабо косимплектическом многообразии тензор Нейенхейса обладает свойствами:

1. $N(\Phi^2X, \Phi^2Y) = -N(\Phi X, \Phi Y);$
2. $N(\Phi X, \Phi^2Y) = N(\Phi^2X, \Phi Y).$

Доказательство. С учетом (5) запишем формулу для нахождения тензора $N^{(1)}(X,Y)$ в терминах ковариантной производной. Так как мы рассматриваем риманову связность, которая является связностью без кручения, то для вычислений используем известное равенство [2]:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y],$$

а именно

$$N^1(X,Y) = \nabla_{\Phi X}(\Phi)Y - \nabla_{\Phi Y}(\Phi)X + \Phi(\nabla_Y(\Phi)X) - \\ - \Phi(\nabla_X(\Phi)Y) + (\nabla_X(\eta)Y)\xi - (\nabla_Y(\eta)X)\xi$$

Пусть $X = \varepsilon_i, Y = \varepsilon_j$. Тогда очевидно, что на пространстве присоединенной G-структуры компоненты тензора Нейенхейса вычисляем как:

$$(N^{(1)})^k_{i,j} = \Phi^l_i\Phi^k_{j,l} - \Phi^m_j\Phi^k_{i,m} + \Phi^p_{i,j}\Phi^k_p - \\ - \Phi^k_p\Phi^p_{j,i} + \eta_{j,i}\xi^k - \eta_{i,j}\xi^k$$

Непосредственно проверяется, что $N^a_{b,c} + N^{\hat{a}}_{b,c} + N^0_{b,c} = 0$. Применив процедуру восстановления тождества к этому равенству, получим свойства тензора Нейенхейса:

$$N(\Phi^2X, \Phi^2Y) = -N(\Phi X, \Phi Y);$$
$$N(\Phi X, \Phi^2Y) = N(\Phi^2X, \Phi Y).$$

Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору В. Ф. Кириченко за постановку задачи, постоянное внимание и помощь, оказанную автору при работе над изложенной темой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blair D.E.* Contact manifolds in Riemannian geometry.- Lecture Notes in Mathematics, 509, Springer-

Verlag, Berlin,- 1976.

2. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.//-МПГУ. М., 2003,- 495 с.

3. *Кириченко В. Ф. Аксиома* Ф-голоморфных плоскостей в контактной геометрии - Известия АН СССР. Сер. Мат., 1984, 48, №4, -с. 711-734.

4. *Кусова Е.В.* Дополнительное свойство симметрии тензора кривизны Римана-Кристоффеля для слабо косимплектических структур.// Тезисы докладов международной конференции "Геометрия в Одессе-2008". - Одесса: Благодійний фонд наукових досліджень "Наука 2008". -С.93.

5. *Proppe H.* Thesis, Mc Gill University, 1969.

6. *Blar D.E., Showders D.K.* Almost contact manifolds with Killing structure tensors,// J.Different Geom. - 1974 - V.9.-P.577-582.

Автор статьи:

Кусова
Елена Валерьевна,
кафедра геометрии МПГУ.
E-mail: sofuslee@mail.ru