УДК 514.185:519

К.Л. Панчук, В.Я. Волков

ЛИНЕЙЧАТЫЕ МОДЕЛИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

В теории неевклидовой геометрии известны модели эллиптической прямой: пучок прямых; окружность с центром в центре пучка и отождествленными диаметрально противоположными точками; прямая, касательная к окружности [1,2]. Известен также принцип перенесения Котельникова – Штуди, определяющий конструктивно-метрическое соответствие геометрии связки прямых и плоскостей расширенного евклидова пространства R_3 и геометрии линейчатого пространства $R_3(\ell)$ с основным элементом – прямой линией ℓ [3,4]. В этой связи, если рассматривать указанный пучок как элемент связки, можно поставить задачу об определении линейчатых моделей эллиптической прямой. Ее решение, во-первых, позволит расширить класс моделей эллиптической прямой, во-вторых, может послужить вспомогательным инструментом для моделирования линейчатого пространства эллиптической плоскостью. Решению указанной задачи посвящена настоящая работа.

Известно, что абсолют пучка прямых, представляющий собой пару изотропных прямых, индуцирует на окружности S_1 с центром в центре пучка и отождествленными диаметрально противоположными точками и на прямой R_1^s, касательной к этой окружности, эллиптическую метрику расстояний [2]. При этом абсолютами на моделях S_1 и R_1^s являются соответственные пары мнимо-сопряженных точек пересечения изотропных прямых пучка с этими моделями. Метрика каждой из трех моделей эллиптической прямой имеет два представления.

1. Координатное. Например, расстояние δ между точками $X(x_1,x_2)$ и $Y(y_1,y_2)$ прямой R_1^s определяется формулой $cos\dfrac{\delta}{r}=\dfrac{\sum x_i y_i}{r^2}$, $i=1,2$, где r – радиус кривизны этой прямой.

2. Проективное. Например, для той же прямой R_1^s можно записать: $\delta=\dfrac{r}{2i}ln(X,Y,I_1,I_2)$, где I_1 и I_2 – пара мнимо-сопряженных точек прямой.

Из сложного отношения четырех прямых пучка x, y, z, t:

$$\mu=(x,y,z,t)=\frac{sin\varepsilon_{xz}}{sin\varepsilon_{yz}}:\frac{sin\varepsilon_{xt}}{sin\varepsilon_{yt}} \tag{1}$$

следует сложное отношение четырех точек X, Y, Z, T эллиптической прямой

$$\mu=(X,Y,Z,T)=\frac{sin\dfrac{\delta_{xz}}{r}}{sin\dfrac{\delta_{yz}}{r}}:\frac{sin\dfrac{\delta_{xt}}{r}}{sin\dfrac{\delta_{yt}}{r}}.$$

Отметим общие характерные особенности моделей указанного класса.

1. В силу непрерывности пучка прямых между любыми двумя моделями существует гомеоморфное соответствие.

2. Изоморфное соответствие абсолютов на моделях, гомеоморфное соответствие самих моделей и возможность проективного представления эллиптической метрики угла в пучке (формула Лагерра) позволяют каждую из моделей рассматривать в то же время как метризованную проективную модель эллиптической прямой.

3. Группа движений – вращений пучка с неподвижным его центром индуцирует на гомеоморфных ему и между собой моделях соответствующую группу движений, состоящую из двух связных компонент: движений первого и движений второго рода. При этом, в случае рассмотрения проективной интерпретации модели, группа движений представляет собой группу метрических коллинеаций, не изменяющих абсолют на модели.

Центр O связки прямых и плоскостей пространства R_3 примем за центр сферы. Большая окружность сферы с отождествленными диаметрально противоположными точками представляет собой эллиптическую прямую S_1 [1,2]. Точке $X\in S_1$ соответствует вектор $\overline{OX}=\overline{x}$ и вектор $-\overline{x}$, при этом $\overline{x}^2=r^2$. Линейной комбинации точек $X(x_i)$ и $Y(y_i)$ прямой $X+\lambda Y=mZ$, соответствует линейная комбинация векторов $\overline{x}+\lambda\overline{y}=m\overline{z}$, где $Z\in S_1$, $\overline{x}^2=\overline{y}^2=\overline{z}^2=r^2$, m – нормирующий множитель. По принципу перенесения геометрии связки на линейчатое пространство $R_3(\ell)$, линейной комбинации векторов будет соответствовать линейная комбинация двух винтов $\overline{X}+\lambda\overline{Y}=\overline{Z}$, где λ может быть как вещественным, так и дуальным числом $\lambda=\lambda_0+\omega\lambda_1$, $\omega^2=0$. Дуальные модули винтов $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ произвольны, в отличие от векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$. Если λ – вещественное число, то множество винтов $\overline{Z}$ линейной комбинации представляет собой двучленную двухосную группу винтов, оси которых описывают алгебраический коноид (АК) третьего порядка [4]. Дуальное уравнение АК, отнесенное к базисным винтам $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, имеет вид:

$$tg\varphi = e^{\omega(P_2 - P_1)} tg\varphi_0 , \qquad (2)$$

где $\overline{X} = \overline{E}_1 e^{\omega P_1}$; $\overline{Y} = \overline{E}_2 e^{\omega P_2}$; P_2 , P_1– параметры (вещественные числа) базисных винтов $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ соответственно; $\varphi = \varphi_0 + \omega\varphi_1$,$\omega^2=0$; φ_0 и φ_1– вещественный угол и минимальное вещественное расстояние между образующей АК и осью базисного винта $\overline{X}$.

В декартовой системе координат XYZ, оси X и Y которой совпадают с осями базисных винтов $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, АК имеет уравнение

$$z(x^2 + y^2) - (P_2 - P_1)xy = 0 ,$$

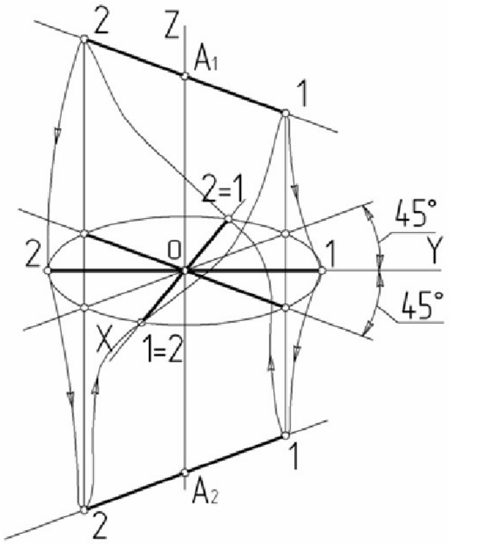
полученное на основе уравнения (2). Разделение главной и моментной частей уравнения (2) приводит к уравнению

$$\varphi_1 = \frac{P_2 - P_1}{2} sin2\varphi_0 , \qquad (3)$$

описывающему геометрическое устройство поверхности АК. При $P_2 > 0$; $P_2 > P_1$ образующая (1,2) описывает замыкающее перемещение по поверхности АК. При этом ее угловому положению $\varphi_0=\pi/4$ соответствует точка пересечения $A_1=(1,2)\cap Z$; при $\varphi_0=\pi/2$ образующая занимает положение (1,2)=Y; при $\varphi_0=3\pi/4$ она занимает положение $A_2=(1,2)\cap Z$ и при $\varphi_0=\pi$ образующая возвращается в исходное положение (1,2)=X (рисунок). Для двух образующих поверхности АК: $x(X_1,X_2)$ и $y(Y_1,Y_2)$, $\sum X_i^2 = \sum Y_i^2 = 1$, $i = 1,2$ имеет место формула дуального угла между ними:

$$cos\varphi = cos\varphi_0 - \omega\varphi_1 sin\varphi_0 = \sum X_i Y_i \ ,\omega^2=0. \qquad (4)$$

Из (3), так же как из (4), при $\varphi_0' = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$ следует $\varphi_1' = -\varphi_1$. Имеет место предложение: если две образующие АК перпендикулярны, то их



точки пересечения с осью АК симметричны относительно центра О поверхности. Подобное предложение имеет место и для эллиптической прямой S_1, когда центр отрезка длиной $\delta_{xy} = r\frac{\pi}{2}$ между ортогональными точками X и Y является одновременно центром дополнительного отрезка $r\pi - \delta_{xy}$. Из уравнений (3) и (4) следует, что дуальный угол φ между двумя прямыми АК является однозначной функцией вещественного угла φ_0. Поэтому положению прямой линии пучка (О) в плоскости XY, определяемому углом $0 \le \varphi_0 \le \pi$, взаимно однозначно соответствует положение образующей на поверхности АК. Если при этом учитывать непрерывность функций (3) и (4), то пучок прямых и соответствующий ему АК являются гомеоморфно соответственными множествами. На основании соотношений (3-4) следует, что метрика АК определяется метрикой пучка прямых. В этой связи можно считать, что абсолют пучка прямых (О) в плоскости XY – пара его изотропных прямых, является в тоже время абсолютом АК. На этом основании угловое положение произвольной образующей *t* рассматриваемого АК относительно оси X определяется углом $\varphi_0 = \frac{i}{2} ln(X,t,i_1,i_2)$. Исходя из доказанного авторами предложения о том, что линейной комбинацией двух образующих АК является образующая, можно получить выражение сложного отношения четырех его образующих $x(X_i)$, $y(Y_i)$, $z(Z_i)$ и $t(T_i)$:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = (x,y,z,t) = \frac{sin(\varphi_z - \varphi_x)_0}{sin(\varphi_z - \varphi_y)_0} : \frac{sin(\varphi_t - \varphi_x)_0}{sin(\varphi_t - \varphi_y)_0} , \quad (5)$$

где $Z_i = X_i + \lambda_1 Y_i$; $T_i = X_i + \lambda_2 Y_i$; λ_1, λ_2 – значения вещественного параметра $\lambda \neq 0$. Автоморфизмы пучка (О) прямых, представляющих собой ортогональные проекции образующих АК на плоскость пучка, описываются уравнениями:

$$X_i' = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} X_j \ ; i = 1,2, \qquad (6)$$

где $\sum a_{i1}^2 = \sum a_{i2}^2 = 1$; $\sum a_{i1} a_{i2} = 0$; $|a_{ij}| \neq 0$; X_i – координаты ортогональной проекции x_0 образующей x поверхности АК такие, что $\sum X_i^2 = 1$.

Представив уравнение (3) АК в виде $\varphi_1 = 2aX_1X_2$ и добиваясь инвариантности этого уравнения относительно преобразований (6), получим группу движений АК, состоящую из двух связных компонент: движения первого рода, описывающие лентообразное синусоидальное движение образующей по поверхности АК и движения второго рода, описывающие отражения АК относительно его осевой плоскости. На основании рассмотренного конструктивно-метрического соответствия АК пучку прямых, представляющему собой одну из гомеоморфно соответственных моделей эллиптической прямой, можно утверждать, что АК есть линейчатая модель эллиптической прямой.

Если в (3) коэффициент $(P_2-P_1)/2=a$ принять в качестве параметра, изменяющегося в пределах $0 \le a < \infty$, то получим пучок соосных неконгруэнтных АК, включая плоскость XY, принадлежащих щетке с осью Z. Каждый из коноидов пучка, на основании вышеизложенного, может быть рассмотрен как линейчатая модель эллиптической прямой.

Пучку прямых в связке прямых и плоскостей пространства R_3 соответствует по принципу перенесения Котельникова – Штуди щетка (∞^2 прямых, ортогонально пересекающих фиксированную прямую) в линейчатом пространстве [4].

При этом геометрия пучка прямых в дуальном варианте переносится на щетку. Углу $cos\varphi_0 = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$ между единичными векторами $\overline{x}\{x_1,x_2,x_3\}$ и $\overline{y}\{y_1,y_2,y_3\}$ двух прямых пучка в связке соответствует дуальный угол между единичными винтами $\overline{X}\{X_1,X_2,X_3\}$ и $\overline{Y}\{Y_1,Y_2,Y_3\}$, оси которых принадлежат щетке линейчатого пространства: $cos\varphi = \sum_{i=1}^{3} X_i Y_i$, где $\varphi = \varphi_0 + \omega\varphi_1$, $\omega^2=0$.

Сложному отношению (1) четырех прямых пучка соответствует сложное отношение четырех прямых α, β, γ, δ щетки:

$$\mu = \left(\alpha,\beta,\gamma,\delta\right) = \frac{sin(\alpha,\gamma)}{sin(\beta,\gamma)} : \frac{sin(\alpha,\delta)}{sin(\beta,\delta)}, \qquad (7)$$

где $\mu = \mu_0 + \omega\mu_1$, $\omega^2=0$. В правой части (7) содержатся дуальные тригонометрические функции и дуальные углы между прямыми щетки.

Проективному преобразованию прямых пучка соответствует проективное преобразование прямых линий щетки, выражаемое дуальной дробнорациональной функцией:

$$X' = \frac{MX+N}{KX+L},\ ML - KN \neq 0\ , \qquad (8)$$

где $X = \frac{X_1}{X_2}$; $X' = \frac{X'_1}{X'_2}$; X_1, X_2 и X'_1, X'_2 - дуальные декартовы однородные координаты проективно соответственных прямых; M, N, K, L – дуальные коэффициенты, определяемые положением исходных трех пар прямых в щетке, задающих проективное соответствие. Формула (8) позволяет по условию $X=X'$ исследовать виды проективных соответствий щетки по их двойным прямым линиям. Введение в формулу (8) условия L = -M позволяет исследовать инволюционные проективные соответствия по двойным прямым $X=X'$, а также позиционные и метрические свойства центральной прямой инволюции. На основании вышеизложенного следует, что щетка представляет собой дуальный образ пучка прямых связки пространства R_3 в отображении, основанном на принципе перенесения Котельникова – Штуди. Поскольку пучок прямых есть одна из гомеоморфно соответственных моделей эллиптической прямой, то щетка есть дуальный образ этой прямой в указанном отображении.

Результаты исследований настоящей работы позволяют сделать следующие выводы.

1. Расширен класс гомеоморфно соответственных моделей эллиптической прямой причислением к этому классу линейчатой поверхности – алгебраического коноида третьего порядка.

2. Показано, что щетка представляет собой дуальную модель эллиптической прямой в отображении, основанном на принципе перенесения Котельникова – Штуди.

В заключение, отметим, что расширение класса моделей эллиптической прямой за счет линейчатых образов определяет новое направление в моделировании и исследовании линейчатого пространства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. – М.- Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 355 с.
2. *Розенфельд Б.А.* Неевклидовы геометрии. – М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1955. – 744 с.
3. *Клейн Ф.* Высшая геометрия. – М.- Л.: ОНТИ, 1939. – 400с.
4. *Диментберг Ф.М.* Теория винтов и её приложения. – М.: Наука, 1978. – 328 с.

Авторы статьи:

Панчук Константин Леонидович - канд.техн.наук., доц. каф. начертательной геометрии, инженерной и компьютерной графики Омского государственного технического университета

Волков Владимир Яковлевич - докт.техн.наук., проф., зав. каф. начертательной геометрии и машинной графики Сибирской автомобильно-дорожной академии