УДК 514.185:519

К.Л. Панчук, В.Я. Волков

КОНСТРУКТИВНО-МЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙЧАТОГО ПРОСТРАНСТВА

Линейчатое пространство принято рассматривать как многообразие прямых, расширенного до проективного евклидова пространства R_3 [1,2]. Известна модель Плюккера линейчатого пространства, построенная на основе представления прямой линии шестеркой однородных плюккеровых координат, связанных квадратичной зависимостью. Эта модель представляет собой квадрику Q_4^2 в пятимерном проективном пространстве [1,2]. В настоящей работе исследуется возможность моделирования линейчатого пространства $R_3(\ell)$ с основным элементом прямой линией ℓ в том же пространстве R_3.

В геометрии известен принцип перенесения Котельникова – Штуди, в соответствии с которым геометрия связки прямых и плоскостей пространства R_3 может быть перенесена на пространство $R_3(\ell)$ [1,3]. В этой связи рассмотрим соответствие метрической структуры пространства $R_3(\ell)$, связки прямых и плоскостей и образов, полученных на основе связки. Как известно, связка S'_2 прямых и плоскостей; сфера S_2 с центром в центре связки и отождествленными диаметрально противоположными точками; плоскость R_2^s, касательная к этой сфере, – это гомеоморфно соответственные модели эллиптической плоскости [2,4]. Изотропный конус $^-K^2$ связки индуцирует на моделях S_2 и R_2^s эллиптическую метрику, определяемую абсолютами: $^-k_S^2 \subset S_2$; $^-k_R^2 \subset R_2^s$. Конструктивно указанные абсолюты представляют собой мнимые линии – сечения конуса $^-K^2$ указанными двумерными моделями.

Для двух точек (x,y,z) и (x_0,y_0,z_0) прямой линии: $x = x_0 + mt$; $y = y_0 + nt$; $z = z_0 + pt$ можно записать $(x - x_0):(y - y_0):(z - z_0) = m:n:p = m_1:n_1:1$. Последнее позволяет определить расстояние между точками: $\delta = \pm\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + 1}\cdot(z - z_0)$. Если $\delta = 0$, то следует $m_1^2 + n_1^2 + 1 = 0$. Поскольку m_1, n_1, 1 суть однородные координаты несобственной точки прямой, то из последнего равенства следует, что несобственная точка изотропной прямой принадлежит абсолюту $^-k_\infty^2$ на несобственной плоскости Δ_∞ пространства R_3, а сама изотропная прямая принадлежит конусу $^-K^2$ с уравнением $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$. Необходимый и достаточный признак изотропной прямой $m_1^2 + n_1^2 + 1 = 0$, очевидно, имеет место для всех изотропных прямых, параллельных данной. Таким образом, изотропные прямые, проходящие через одну и туже точку абсолюта $^-k_\infty^2$, образуют связку прямых с несобственным центром, а все множество изотропных прямых, несобственные точки которых принадлежат $^-k_\infty^2$, образуют изотропный квадратичный комплекс $^-K_M^2$, конусом которого является изотропный конус $^-K^2$ связки прямых и плоскостей. Так как несобственный абсолют $^-k_\infty^2$ представляет собой образ абсолютов $^-k_S^2$, $^-k_R^2$ и образ комплекса $^-K_M^2$ на несобственной плоскости Δ_∞, то комплекс $^-K_M^2$ может быть принят в качестве абсолюта пространства $R_3(\ell)$, при этом мнимая несобственная коника $^-k_\infty^2$ представляет собой образ этого абсолюта. Соответствие абсолютов $^-k_S^2$, $^-k_R^2$ и $^-K_M^2$ по их общему образу $^-k_\infty^2$ приводит к соответствию метрических структур моделей S'_2, S_2, R_2^s эллиптической плоскости и пространства $R_3(\ell)$. В последующем изложении в работе рассматриваются особенности этого соответствия.

Покажем, что эллиптическая плоскость R_2^s может быть рассмотрена как проективная метризованная плоскость P_2^s. Для этого приведем доказательство с привлечением метрической структуры плоскости R_2^s, отличающееся от известного [2], основанного на полярном соответствии относительно абсолюта. Расстояние δ между двумя точками $Y(y_k)$ и $Z(z_k)$ эллиптической плоскости R_2^s радиуса кривизны r определяется по формуле [2]:

$$\cos\frac{\delta}{r} = \frac{\sum y_k z_k}{r^2};\ k = 1,2,3. \quad (1)$$

Определим точки пересечения прямой (y,z) с абсолютом $\sum x_k^2 = 0$; $k = 1,2,3$ в плоскости R_2^s на основе решения уравнения:

$$\sum (y_k + \mu z_k)^2 = 0\,;\ k = 1,2,3, \qquad (2)$$

где μ – вещественный параметр. Пусть μ' и μ'' - корни этого уравнения, соответствующие точкам пересечения $i_1(y_k + \mu' z_k)$ и $i_2(y_k + \mu'' z_k)$. Тогда можно записать выражение сложного отношения четырех точек $y,\ z,\ i_1,\ i_2$ прямой линии: $\lambda = \dfrac{\mu'}{\mu''} =$ (y,z,i_1,i_2). Свойства квадратного уравнения позволяют записать:

$$\frac{(\mu' + \mu'')^2}{\mu'\mu''} = \frac{4(\sum y_k z_k)^2}{r^4} = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}\,;\ k = 1,2,3, \qquad (3)$$

откуда, на основании выражения (1), следует

$$\frac{\delta}{r} = arccos \frac{\lambda + 1}{2\sqrt{\lambda}}\,. \qquad (4)$$

Приведем одну из формул Эйлера в теории аналитических функций:

$$cos\frac{\delta}{r} = \frac{e^{i\frac{\delta}{r}} + e^{-i\frac{\delta}{r}}}{2}\,. \qquad (5)$$

Если ввести обозначения $e^{i\frac{\delta}{r}} = t$; $cos\dfrac{\delta}{r} = m$, то из этой формулы получим $t_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - 1}$. Поскольку $t_1 t_2 = 1$, то есть $t_1 \neq 0$, $t_2 \neq 0$, то уравнение $e^{i\frac{\delta}{r}} = t$ при $t=t_1$ и $t=t_2$ имеет решения относительно δ. Следовательно, $i\dfrac{\delta}{r} = lnt$. Ограничиваясь рассмотрением $t=t_1$, получим $\dfrac{\delta}{r} = arccosm = \dfrac{1}{i} ln(m + \sqrt{m^2 - 1})$, что позволяет на основании (4) записать:

$$\frac{\delta}{r} = arccos\frac{\lambda+1}{2\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{i} ln\Big(\frac{\lambda+1}{2\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\frac{(\lambda+1)^2}{4\lambda} - 1}\Big) = \frac{1}{i} ln\sqrt{\lambda}\,.$$

В итоге получаем $\lambda = e^{2i\frac{\delta}{r}}$, откуда следует

$$\frac{\delta}{r} = \frac{1}{2i} ln\lambda = \frac{1}{2i} ln(y,z,i_1,i_2)\,. \qquad (6)$$

Таким образом, абсолют $^-k_R^2$ плоскости R_2^s определяет на ней эллиптическую метрику (1), имеющую проективную интерпретацию (6). То есть абсолют плоскости R_2^s есть в то же время мнимая коника проективной плоскости P_2^s. Вышеизложенное позволяет представить схематично соответствие геометрий эллиптической плоскости $R_2^s = P_2^s$, сферы S_2 с отождествленными диаметрально противоположными точками, связки S'_2 прямых и плоскостей и линейчатого пространства $R_3(\ell)$:

$$R_2^s = P_2^s \leftrightarrow S_2 \leftrightarrow S'_2 \rightarrow R_3(\ell). \qquad (7)$$

Рассмотрим конструктивно-метрическое соответствие эллиптической плоскости и линейчатого пространства.

Соответствие расстояний. Ввиду замкнутости эллиптической прямой формула (1) определяет в плоскости R_2^s два расстояния между точками Y и Z: δ и $\delta' = r\pi - \delta$. Из полярности точек относительно абсолюта следует уравнение эллиптической прямой $\sum a_k x_k = 0$, $k = 1,2,3$, где a_k - декартовы однородные координаты полюса прямой в той же полярности. Формулой $cos\Delta = \sum_{k=1}^{3} Y_k Z_k$ определяется дуальный угол $\Delta = \delta_0 + \omega\delta_1$ между двумя направленными прямыми $y(Y_k)$ и $z(Z_k)$ в линейчатом пространстве, составляющими которого являются угол δ_0 и кратчайшее расстояние δ_1 между прямыми. Из полярности прямых относительно абсолюта $^-K_M^2$ линейчатого пространства следует уравнение щетки (∞^2 прямых, ортогонально пересекающих фиксированную прямую пространства): $\sum A_k X_k = 0$, где A_k и X_k - соответственно дуальные декартовы координаты фиксированной и переменной прямой.

Соответствие углов. Угол между двумя прямыми $\sum a_k x_k = 0$ и $\sum b_k x_k = 0$ в эллиптической плоскости определяется формулой $cos\varphi = \dfrac{\sum a_k b_k}{r^2}$; $k = 1,2,3$. Угол между двумя щетками $\sum A_k X_k = 0$ и $\sum B_k X_k = 0$; $k = 1,2,3$ в линейчатом пространстве определяется формулой $cos\Phi = cos\varphi_0 - \omega\varphi_1 sin\varphi_0 = \sum A_k B_k$; $\omega^2 = 0$, где A_k и X_k - дуальные декартовы координаты направленных осей щеток.

Метрическая полярность образов точек и прямых эллиптической плоскости на несобственной плоскости пространства R_3 и метрическая полярность образов соответствующих им линейчатых объектов в пространстве $R_3(\ell)$ на той же несобственной плоскости совпадают. Этим объясняется формальное совпадение и эквивалентность метрического смысла соответственных метрических формул эллиптической плоскости и линейчатого пространства. При этом каждая из метрических характеристик в обоих пространствах имеет как координатную, так и проективную интерпретации.

Соответствие преобразований. Вращение сферы S_2 относительно ее центра и отражение ее от диаметральной плоскости индуцирует в эллиптической плоскости движения – метрические коллинеации, не изменяющие абсолют плоскости. Эти преобразования описываются формулами:

$$\rho x_i' = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k \; ; \rho \neq 0 \; ; \; \left| a_{ik} \right| \neq 0 \; ; \; \sum_{i=1}^{3} a_{ik}^2 = 1 \; ;$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ki} a_{kj} = 0 \; ; i,j = 1,2,3 \; ; \; i \neq j \; . \qquad (8)$$

В эллиптической плоскости движение – вращение, представляет собой движение с неподвижной точкой и неподвижной прямой – полярой центра относительно абсолюта плоскости. Эти условия накладывают определенные ограничения на коэффициенты матрицы преобразований в уравнении (8). В итоге уравнения (8) описывают собственно вращение с определителем $\left| a_{ik} \right| = 1$ и отражение от поляры неподвижной точки с определителем $\left| a_{ik} \right| = -1$. В эллиптической плоскости отражение от прямой есть вращение относительно ее полюса на угол π.

Преобразованиям (8) эллиптической плоскости соответствуют преобразования линейчатого пространства, аналитическая запись которых в дуальном евклидовом пространстве $R_{3(\omega)}$ имеет вид:

$$X_i' = \sum_{k=1}^{3} A_{ik} X_k \; ; \left| A_{ik} \right| \neq 0 \; ; \sum_{i} A_{ik}^2 = 1 \; ;$$

$$\sum_{k} A_{ik} A_{jk} = 0 \; ; \; i,j=1,2,3; \; i \neq j. \qquad (9)$$

При $\left| A_{ik} \right| = 1$ преобразования (9) представляют собой винтовое движение. Инвариантные линейчатые множества в винтовом движении могут быть интерпретированы в несобственной плоскости. Неподвижной оси винтового движения соответствует ее несобственная точка, поляра которой относительно абсолюта на несобственной плоскости представляет собой множество несобственных точек прямых щетки с осью винтового движения. Винтовое движение оставляет щетку инвариантной, при этом ее прямые переставляются местами. Следовательно, образом винтового движения с инвариантной щеткой является вращение с неподвижным центром и неподвижной полярой этого центра относительно неподвижной коники $^{-}k_{\infty}^2$ в несобственной плоскости Δ_{∞}.

Соответствие коник эллиптической плоскости и их линейчатых образов. Метрической структурой эллиптической плоскости в ней определены лишь две коники: окружность и эллипс. Из уравнения окружности в координатной форме

$$\cos\frac{\delta}{r} = \frac{\sum a_i x_i}{r^2} \; ; \sum a_i^2 = \sum x_i^2 = r^2 \; ;$$

$$0 \leq \delta \leq r\frac{\pi}{2}$$

следует ее уравнение в параметрической форме:

$$x_1 = r\cos\frac{\sigma}{r}\sin\frac{\delta}{r} \; ; \; x_2 = r\sin\frac{\sigma}{r}\sin\frac{\delta}{r} \; ; x_3 = r\cos\frac{\delta}{r} \; , \qquad (10)$$

где δ – радиус окружности; σ – параметр, равный величине переноса точки на поляре центра окружности, соответствующей углу поворота прямой, проходящей через центр и точку поляры. На основе принципа перенесения Котельникова – Штуди установлено, что уравнениям (10) окружности соответствуют дуальные параметрические уравнения линейчатой конгруэнции Кг(2,2):

$$X_1 = R\cos\varphi \cdot \sin\alpha \; ; \; X_2 = R\sin\varphi \cdot \sin\alpha \; ;$$

$$X_3 = R\cos\alpha \; ; \; \sum_{i} X_i^2 = 1 \; , \qquad (11)$$

где R – дуальный модуль винта с осью m; $\alpha = \alpha_0 + \omega\alpha_1$; $\omega^2 = 0$ - неизменный дуальный угол между прямой m и неподвижной осью E_3; $\varphi = \varphi_0 + \omega\varphi_1$ - переменный угол между ортогональной проекцией m_3 прямой m на ось E_3 и фиксированной прямой E_1, где $E_1 \perp E_3$.

Параметрические уравнения эллипса в эллиптической плоскости, построенного по двум окружностям (10), имеют вид:

$$x_1 = a(\sigma) \cdot \cos\frac{\sigma}{r} \; ; x_2 = b(\sigma) \cdot \sin\frac{\sigma}{r} \; ; x_3 = c(\sigma) \; ;$$

$$\sum_{i} x_i^2 = r^2 \; , \qquad (12)$$

где параметр σ имеет тот же смысл, что и в уравнении окружности (10). Уравнениям (12) соответствуют дуальные параметрические уравнения специальной конгруэнции Кг(2,2) в линейчатом пространстве:

$$X_1 = A(\varphi) \cdot \cos\varphi \; ; X_2 = B(\varphi)\sin\varphi \; ; X_3 = C(\varphi) \; ;$$

$$\sum_{i} X_i^2 = 1 \; , \qquad (13)$$

где дуальный угол $\varphi = \varphi_0 + \omega\varphi_1 ; \omega^2 = 0$ соответствует в линейчатой интерпретации по смыслу углу $\frac{\sigma}{r}$ в уравнениях эллипса. В итоге получаем, что линейчатые образы коник эллиптической плоскости представляют собой конгруэнцию Кг(2,2). В этой связи исследование конструктивных и метрических свойств этой конгруэнции можно вести, выполняя исследование соответствующих свойств коник эллиптической плоскости.

В отечественной геометрической литературе отсутствуют исчерпывающие сведения относительно свойств коник эллиптической плоскости, кроме сведений общего конструктивного характера, касающихся в целом коник неевклидовой плоскости, и ссылок на публикации зарубежных авторов [2,4]. Исходя из этого и учитывая взаимосвязь коник и линейчатых конгруэнций, авторами настоящей работы были исследованы конструктивные и метрические свойства этих линий. Приведем основные результаты этих исследований.

Окружность. Уравнением окружности $\sum a_i x_i = r^2 cos\frac{\delta}{r}$; $\sum a_i^2 = \sum x_i^2 = r^2$; $i=1,2$ и уравнением абсолюта $\sum x_i^2 = 0$ эллиптической плоскости определены конструктивные и метрические свойства окружности. Перечислим основные из них.

1. Поляры центра $(a_1 : a_2 : a_3)$ окружности относительно окружности и абсолюта совпадают. Поляра является вещественной двойной линией. Точки пересечения поляры с абсолютом являются точками касания окружности с абсолютом. Поляра является общей для всех концентрических окружностей. Из полярного соответствия относительно абсолюта следует, что окружность есть огибающая множества прямых линий, образующих неизменный угол с постоянной прямой – полярой ее центра. Окружность и абсолют имеют общий автополярный треугольник, который может быть принят в качестве координатного проективного треугольника.

2. На основании конструктивных и метрических свойств автополярного треугольника выявлены свойства, аналогичные свойствам окружности в евклидовой плоскости: диаметр окружности в своих конечных точках перпендикулярен касательным к ней и делит перпендикулярные к нему хорды пополам; огибающая положений подвижной, неизменной длины хорды окружности, есть окружность, соосная данной; множество точек плоскости - вершин подвижного, неизменной величины угла, стороны которого касаются данной окружности, есть окружность, концентричная данной. Последние два свойства, как и множество других, двойственны в метрической полярности относительно абсолюта.

Совместное рассмотрение уравнений двух окружностей в системе координат автополярного проективного треугольника выявляет свойства пары окружностей: две окружности пересекаются в четырех действительных точках (в евклидовой плоскости две окружности пересекаются в двух действительных и двух мнимо-сопряженных точках); две радикальные прямые и поляры двух центров окружностей образуют гармоническую четверку прямых и другие свойства.

Эллипс. Рассмотрением уравнений эллипса в эллиптической плоскости

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 - a_3 x_3^2 = 0 \,; \; \sum x_i^2 = 1$$

и абсолюта $\sum x_i^2 = 0$ получена система конструктивно-метрических свойств эллипса, основанная на метрических отношениях между фигурами, конструктивно связанными с эллипсом и абсолютом. К ним относятся: четыре абсолютные мнимые точки; шесть фокальных прямых (две действительные и четыре мнимые); три действительные центра и три действительные оси; четыре абсолютные мнимые касательные; шесть фокусов (два действительных и четыре мнимых); шесть директрис (две действительные и четыре мнимые); сопряженные диаметры; шесть асимптот (четыре действительные и две мнимые). Свойства следуют из метрических отношений между фигурами, выражаемых тригонометрическими функциями расстояний и углов и математическими действиями над ними.

Соответствие метрических структур эллиптической плоскости и многообразия прямых расширенного трехмерного евклидова пространства по абсолюту этого пространства позволяет выполнять конструктивно-метрическое моделирование этого многообразия эллиптической плоскостью. При этом точечным прообразам эллиптической плоскости конструктивно и метрически соответствуют линейчатые образы многообразия прямых.

Изложенный в работе подход определяет новое направление в моделировании и исследовании линейчатого пространства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Клейн Ф.* Высшая геометрия. – М.- Л.: ОНТИ, 1939. – 400с.
2. *Розенфельд Б.А.* Неевклидовы геометрии. – М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1955. – 744 с.
3. *Диментберг Ф.М.* Теория винтов и её приложения. – М.: Наука, 1978. – 328 с.
4. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. – М.- Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 355 с.

Авторы статьи:

Панчук Константин Леонидович - канд.техн.наук., доц. каф. начертательной геометрии, инженерной и компьютерной графики Омского государственного технического университета

Волков Владимир Яковлевич - докт.техн.наук., проф., зав. каф. начертательной геометрии и машинной графики Сибирской автомобильно-дорожной академии