ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

А.С.Сорокин

УРАВНЕНИЕ ТИПА ЛЕВНЕРА, СОДЕРЖАЩЕЕ ПРОИЗВОДНУЮ УПРАВЛЯЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

В работах [1-12] для получения функций, реализующих однолистные конформные отображения круга использовались уравнение типа Лёвнера и уравнение Лёвнера – Куфарева.

Каждое решение любого из этих уравнений, рассматриваемое как функция начального условия, даёт конформное отображение круга или его части на некоторую область, вид которой определяется выбором управляющей функции и её производной в уравнении типа Лёвнера.

В случае уравнения Лёвнера – Куфарева [2] вид функции определяется выбором семейства функций из класса Каратеодори. Это даёт возможность построить композиции конформных отображений как результата непрерывного процесса преобразования круга.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\zeta}{d\tau}=A(\tau)\frac{\zeta(\zeta+C(\tau))}{(\zeta-\mu(\tau))} \tag{1}$$

с начальным условием $\zeta(0)=z$, где

$$A(\tau)=1+\frac{2\mu'(\tau)}{z+\mu(0)}, \tag{2}$$

$$C(\tau)=\mu(\tau)-\frac{2\mu'(\tau)}{A(\tau)}. \tag{3}$$

Кроме того, $\mu(\tau)$, $|\mu(\tau)|=1$ и $\mu'(\tau)-$ управляющая функция и её производная.

Уравнение (1) будем называть уравнением типа Левнера.

Пусть

$$B(\tau)(\zeta+\mu(\tau))^2=4\zeta, \tag{4}$$

где

$$B(\tau)=\frac{4z}{(z+\mu(0))^2}\exp(-\tau_1), \tag{5}$$

$$\tau_1=\tau+\frac{2(\mu(\tau)-\mu(0))}{z+\mu(0)}.$$

Из (2) и (5) следует

$$B'(\tau)=-B(\tau)A(\tau). \tag{6}$$

Покажем, что соотношение (4) является решением уравнения (1) .

Продифференцировав соотношение (4) по τ, получим

$$B'(\tau)(\zeta+\mu(\tau))^2+ \\ +2B(\tau)(\zeta+\mu(\tau))(\zeta'+\mu'(\tau))=4\zeta'. \tag{7}$$

Разделив обе части соотношения (7) на $(\zeta+\mu(\tau))$, имеем

$$B'(\tau)(\zeta+\mu(\tau))+2B(\tau)(\zeta'+\mu'(\tau))= \\ =\frac{4}{\zeta+\mu(\tau)}\zeta'. \tag{8}$$

Преобразуем (8) с помощью (6)

$$-B(\tau)A(\tau)(\zeta+\mu(\tau))+2B(\tau)(\zeta'+\mu'(\tau))= \\ =\frac{4}{\zeta+\mu(\tau)}\zeta'. \tag{9}$$

Преобразовав левую часть (9), имеем

$$B(\tau)[2(\zeta'+\mu'(\tau))-A(\tau)(\zeta+\mu(\tau))]= \\ =\frac{4}{\zeta+\mu(\tau)}\zeta'. \tag{10}$$

Разделив обе части (10) на $B(\tau)$, получим

$$2\zeta'+2\mu'(\tau)-A(\tau)(\zeta+\mu(\tau))]= \\ =\frac{4}{B(\tau)(\zeta+\mu(\tau))}\zeta'. \tag{11}$$

Группируя слагаемые, содержащие производную ζ' в левой части, имеем соотношение

$$\zeta'\left(2-\frac{4}{B(\tau)(\zeta+\mu(\tau))}\right)= \\ =A(\tau)(\zeta+\mu(\tau))-2\mu'(\tau). \tag{12}$$

Разделив обе части (12) на $A(\tau)$,получим

$$\frac{\zeta'}{A(\tau)}\left(2-\frac{4}{B(\tau)(\zeta+\mu(\tau))}\right)= \\ =\zeta+\mu(\tau)-\frac{2\mu'(\tau)}{A(\tau)}. \tag{13}$$

Применяя (3) , преобразуем (13) к виду

$$\frac{\zeta'}{A(\tau)}\left(2-\frac{4}{B(\tau)(\zeta+\mu(\tau))}\right)=\zeta+C(\tau). \tag{14}$$

Умножив обе части (14) на $A(\tau)$, получим

$$\zeta'\left(2-\frac{4}{B(\tau)(\zeta+\mu(\tau))}\right)= \\ =A(\tau)(\zeta+C(\tau)). \tag{15}$$

Умножив обе части (15) на $\dfrac{\zeta}{\zeta-\mu(\tau)}$, получим

$$\zeta'\left(\frac{2B(\tau)(\zeta+\mu(\tau))-4}{B(\tau)(\zeta+\mu(\tau))}\right)\frac{\zeta}{\zeta-\mu(\tau)}= \tag{16}$$
$$=A(\tau)\frac{\zeta(\zeta+C(\tau))}{(\zeta-\mu(\tau))}.$$

Преобразуем (4) к виду

$$\zeta=\frac{1}{4}B(\tau)(\zeta+\mu(\tau))^2. \tag{17}$$

С помощью (17) преобразуем левую часть (16)

$$\zeta'\left(\frac{2B(\tau)(\zeta+\mu(\tau))-4}{B(\tau)(\zeta+\mu(\tau))}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{B(\tau)(\zeta+\mu(\tau))^2}{\zeta-\mu(\tau)}=$$
$$=A(\tau)\frac{\zeta(\zeta+C(\tau))}{(\zeta-\mu(\tau))}. \tag{18}$$

Производя элементарные операции в левой части (18), получим

$$\zeta'\left(\frac{2B(\tau)(\zeta+\mu(\tau))-4}{4(\zeta-\mu(\tau))}\right)\cdot(\zeta+\mu(\tau))= \tag{19}$$
$$=A(\tau)\frac{\zeta(\zeta+C(\tau))}{(\zeta-\mu(\tau))}.$$

Преобразуя числитель левой части (19), получим

$$\zeta'\left(\frac{2B(\tau)(\zeta+\mu(\tau))^2-4(\zeta+\mu(\tau))}{4(\zeta-\mu(\tau))}\right)= \tag{20}$$
$$=A(\tau)\frac{\zeta(\zeta+C(\tau))}{(\zeta-\mu(\tau))}.$$

Преобразуя числитель левой части (20) с помощью формулы (17), получим

$$\zeta'\left(\frac{8\zeta-4(\zeta+\mu(\tau))}{4(\zeta-\mu(\tau))}\right)=A(\tau)\frac{\zeta(\zeta+C(\tau))}{(\zeta-\mu(\tau))}. \tag{21}$$

Раскрывая скобки в левой части (21), приходим к уравнению (1)

$$\zeta'=A(\tau)\frac{\zeta(\zeta+C(\tau))}{(\zeta-\mu(\tau))}.$$

Теорема.
Функция

$$\zeta=\frac{1}{B}\left(1-\sqrt{1-B\mu(\tau)}\right)^2, \tag{22}$$
$$B=\frac{4z}{(z+\mu(0))^2}e^{-\tau_1},\ \tau_1=\tau+\frac{2(\mu(\tau)-\mu(0))}{z+\mu(0)},$$

является решением (1). Она отображает единичный круг плоскости z на единичный круг с криволинейным разрезом от точки $\zeta_0=\mu(\tau)$, до точки

$$\zeta_\kappa=\mu(0)e^{\tau_2}\left(1-\sqrt{1-\frac{\mu(\tau)}{\mu(0)}e^{-\tau_2}}\right)^2,$$
$$\tau_2=\tau-1+\frac{\mu(\tau)}{\mu(0)}.$$

Разрезу на окружности $|z|=1$ соответствует дуга с концами в точках z_1 и z_2, содержащей точку $z_\kappa=\mu(0)$, z_1 и z_2 являются решениями уравнений $z=\left(\sqrt{\mu(\tau)e^{-t}}\pm\sqrt{\mu(\tau)e^{-t}-\mu(0)}\right)^2$,
где $t=\tau+\dfrac{2(\mu(\tau)-\mu(0))}{z+\mu(0)}$.

Следствие. Если в формуле (1) устремить $\mu'(\tau)\to 0$, получаем уравнение Лёвнера. [1-15].

Функция

$$f(z)=\lim_{\tau\to\infty}e^{\tau}\zeta(z,\tau) \tag{23}$$

однолистно и конформно отображает единичный круг E на единичный круг с разрезом по жордановой дуге.

Выполняя предельный переход в (23) с учетом (22), получим

$$f(z)=(D(z))^2\exp\left(\frac{2(\mu(0)-\mu(\infty))}{z+\mu(0)}\right),$$

где

$$D(z)=\frac{z(\mu(\infty)-\mu'(\infty))(z+\nu)}{(z+\mu(0))^2(z+\mu(0)+\mu'(\infty))}.$$

Кроме того,

$$\nu=\frac{\mu(\infty)(\mu(0)+2\mu'(\infty))-\mu(0)\mu'(\infty)}{\mu(\infty)-\mu'(\infty)}.$$

В связи с рассмотренным выше примером отметим, что для того, чтобы решение $\zeta=\zeta(z,\tau)$ уравнения типа Лёвнера

$$\frac{d\zeta}{d\tau}=A_1\left(e^{i\alpha(\tau)}\right)\frac{\zeta\left(\zeta+C_1\left(e^{i\alpha(\tau)}\right)\right)}{\left(\zeta-e^{i\alpha(\tau)}\right)},$$
$$0\le\tau<\infty,\ \ \zeta\big|_{\tau=0}=z,$$

где

$$A_1\left(e^{i\alpha(\tau)}\right)=1+\frac{2i\alpha'(\tau)e^{i\alpha(\tau)}}{z+e^{i\alpha(0)}},$$
$$C_1(\tau)=e^{i\alpha(\tau)}-\frac{2i\alpha'(\tau)e^{i\alpha(\tau)}}{A_1\left(e^{i\alpha(\tau)}\right)}.$$

отображало единичный круг E на единичный круг с разрезом по жордановой дуге достаточно, чтобы вещественнозначная функция $\alpha(\tau)$ имела ограниченную производную.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Löwner K*. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildung des Einheitskreises. I, // Math. Ann., 1923, Bd.89,

№2, S.103-121.

2. *Куваев М.Р., Куфарев П.П.* Об уравнении типа Левнера для многосвязных областей.// Ученые записки Томского ун-та, Т. 25, 1955. Томск: ТГУ, С. 19-34.

3. *Куфарев П.П.* Труды П.П. Куфарева. К 100-летию со дня рождения. Томск: ТГУ, 2009. 366 с.

4. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. -М. : 1952. 540 с.

5. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. -Томск: ТГУ, 2001, 219 с.

6. *Сорокин А.С.* Задача М.В.Келдыша-Л.И.Седова для многосвязных круговых областей.// Доклады Академии Наук СССР, Т.293, №1, 1987.С. 41-44.

7. *Сорокин А.С.* Задача М.В.Келдыша-Л.И.Седова для многосвязных круговых областей.// Доклады Академии Наук СССР, Т.296, №4, 1987. С. 801-804.

8. *Сорокин А.С* Вариационный метод Г.М. Голузина - П.П. Куфарева и формула М.В.Келдыша-Л.И.Седова.// Доклады Академии Наук СССР, Т.308, №2, 1989.С. 273-277.

9. *Сорокин А.С.* Параметрическое представление функций в конечносвязных областях.// Сиб.матем.журн., Т.38, №5, 1997.С. 1163-1178.

10. *Сорокин А.С.* Краевые задачи в многосвязных областях и их приложения. - Новокузнецк: СибГИУ, 1998. 415 с.

11. *Сорокин А.С.* Уравнение Левнера-Голузина-Комацу для конечносвязной области.// Дифференциальные уравнения и топология. Москва: МГУ, 2008. С. 198.

12. *Александров А.И.*Применение уравнений Лёвнера, Лёвнера-Куфарева для нахождения конформных отображений.// Вестник ТГУ, математика и механика. №1(5), 2009. С.5-10.

13. *Куфарев П.П.* Одно замечание об уравнении Лёвнера.// Доклады Академии Наук СССР, Т.57, № 5, 1947. С . 655-656.

14. *Куфарев П.П.* Об интегралах простейшего дифференциального уравнения с подвижной полярной особенностью правой части. //Ученые Записки Томского ун-та. 1946, С.35-48.

15. *Садритдинова Г.Д.* Об одном случае интегрирования уравнения Лёвнера с симметрией вращения. // Доклады РАН , Т.368, № 3, 1999. С. 462-463.

Автор статьи:

Сорокин
Андрей Семенович,
- канд. физ.-мат.наук, доцент,
ст.н.с. (филиал КузГТУ, г. Новокузнецк),
тел.: 8(3843) 772459

УДК 517.946

В. М. Волков, Е. А. Волкова

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрим в области

$$D(T,x_0)=\{x_0<x<\infty,\ 0<t\le T\}$$

для уравнения

$$u_t=u_{xx}+q(u,x)+f(x,t) \qquad (1)$$

вторую краевую задачу

$$u\big|_{t=0}=0,\ x_0\le x<\infty, \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0}=0,\ 0\le t\le T, \qquad (3)$$

и пусть относительно ограниченного решения этой задачи известна в точке $x=x_0$ функция

$$u\big|_{x=x_0}=\psi(t,x_0),\ 0\le t\le T. \qquad (4)$$

Теперь предположим, что x_0 изменяется от нуля до бесконечности, тогда наша задача состоит в определении функции $q(u,x)$ по известной функции $\psi(t,x_0)$.

Теорема. Пусть функции $f(x,t)$ и $\psi(t,x_0)$ удовлетворяют условиям

$$f(x,t)\in C([0,\infty]\times[0,T]),$$

$$\psi(t,x_0)\in C^{1,0}([0,T]\times[0,\infty])$$

и

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{x=x_0}\ge\gamma,\ 0\le t\le T,$$

где γ - достаточно большое положительное число.

Пусть выполнено условие согласования $\psi(0,x_0)=0$.

Тогда решение обратной задачи $q(u,x)$ единственно в классе функций

$$q(u,x)\in C^{1,1}([-\infty,\infty]\times[0,\infty])$$

и удовлетворяющих условиям