ПЕДАГОГИКА ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

УДК 517

А.А.Бокк

ЭТИ РАЗНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Понятия производной, первообразной и определенного интеграла излагаются в школьном курсе математики, причем определенный интеграл вводится как предел интегральных сумм (Мордкевич А.Г. Алгебра и начала анализа, 10-11кл.), как приращение первообразной (Амилов Ш.А. и др.) или с рассмотрением его свойств и приложений в учебных заведениях с углубленным изучением математики (Виленкин Н.Я.и др.).

Однако студент технического вуза должен владеть основными понятиями дифференциального и интегрального исчисления в бóльшем объеме и, особенно, с практической, вычислительной стороны. Межпредметные связи, интересы других дисциплин требуют от студента уже в первых семестрах определенных навыков в вычислении интегралов и дифференцировании функций нескольких переменных.

В курсе математики основные идеи, факты, понятия необходимо напоминать неоднократно, развивая и обобщая их. Конкретные задачи естествознания или техники выступают первотолчком к введению их математических представлений (понятий). Появляясь сначала на интуитивном уровне, эти понятия получают затем строгие определения, уточняются их свойства и возможные приложения. Следующий этап, если позволяет время, - возможные обобщения и краткий обзор эволюции данного понятия.

Задача восстановления функции по ее производной упоминается уже в теме «Производная». В курсе высшей математики студент встречается с доброй дюжиной интегралов: по отрезку, двойной или по плоской области, три типа криволинейных, три типа поверхностных, два рода несобственных, кратные, Римана, Лебега, Стильтьеса.

Полагаю, что следует начать с определенного интеграла как приращения первообразной[1].

Определение 1. Пусть функция f непрерывна на $[a,b]$ и F – ее первообразная. Число

$$J = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

называется интегралом от функции f по отрезку $[a,b]$.

Такое введение определенного интеграла легко запоминается. Просто доказать все свойства интеграла, нетрудно придать физический смысл интегралу как перемещению прямолинейно движущейся точки за время от $t_o=a$ до $t_k=b$ со скоростью $v=f(t)$ или геометрический – как площади криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$ и графиком функции $y=f(x)\geq 0$.

Формула Ньютона-Лейбница (1), являясь определением, в доказательстве не нуждается. Легко выводятся на ее основе и популярные квадратурные формулы прямоугольников и трапеций.

Из оценки неубывающей на $[x_k, x_{k+1}]$ функции $f(x_k)\leq f(x)\leq f(x_{k+1})$ после интегрирования по $[x_k, x_{k+1}]$ и суммирования ($[a,b] = \bigcup_{k=0}^{n-1}[x_k, x_{k+1}]$) следуют неравенства ($\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$)

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot\Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt = J =$$

$$= \int_a^b f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\cdot\Delta x_k \ .$$

Переход к пределу при $max\ \Delta x_k \to 0$ ($n\to\infty$) для непрерывной на $[a,b]$ функции f даст

$$\lim_{\Delta x_k\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot\Delta x_k \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt = J =$$

$$= \int_a^b f(t)dt \leq \lim_{\Delta x_k\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\cdot\Delta x_k \ .$$

Второе определение интеграла (предел интегральных сумм) возникает вполне естественно для неубывающей и непрерывной на $[a,b]$ функции f, имеющей первообразную.

[1] Преимущество такого введения понятия об интеграле отстаивал акад. А.Н.Колмогоров в ряде методических статей 60-70-х годов (см. также учебники : «Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа, 10 кл. » изд. 1979 и 1991 г.).

Определение 2. Интегралом от функции f по отрезку $[a,b]$ называют предел интегральных сумм ($S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\cdot\Delta x_k$, $c_k\in[a,b]$) - число

$$J = \lim_{\max\Delta x_k\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\cdot\Delta x_k\ , \qquad (2)$$

если этот предел не зависит от способа разбиения $[a,b]$ на части ($[a,b] = \bigcup_{k=0}^{n-1}[x_k, x_{k+1}]$) и от выбора $c_k\in[a,b]$.

Подчеркнем, что второе определение более общее, чем первое. Оно не требует от функции f существования первообразной, допускает распространение на случай, когда область D интегрирования не только отрезок оси Ох. Но первое определение предпочтительнее: определенный интеграл чаще всего вычисляют именно как приращение первообразной.

Для сопоставления благодарна задача нахождения площади криволинейной трапеции (подграфика непрерывной функции $f(x)\geq 0$).

С одной стороны, приращение площади $S(x)-S(a)$ подграфика функции f , исходя из неравенств

$$\min f(x^*)\leq \Delta S/\Delta x \leq \max f(x^*)$$

при $x^*\in[x, x+\Delta x]$, дает равенство $dS/dx=f(x)$ при предельном переходе $\Delta x\to 0,$ то есть $S(x)-S(a)$ действительно первообразная для f и

$$S = S(b)-S(a) = \int_a^b S'(x)dx = \int_a^b f(x)dx\ .$$

С другой стороны, для площади S как общего предела последовательности $\{S_n^+\}$ «объемлющих» и последовательности $\{S_n^-\}$ «объемлемых» ступенчатых фигур (рисунок, заштрихована площадь d_4) имеем

$$S_n^- = \sum_{k=0}^{n-1}(\min_{\Delta x_k} f)\times\Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\cdot\Delta x_k \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1}(\max_{\Delta x_k} f)\times\Delta x_k = S_n^+$$

(здесь c_k – произвольная точка интервала $[x_k,\ ,\ x_k+\Delta x_k]$). Разность

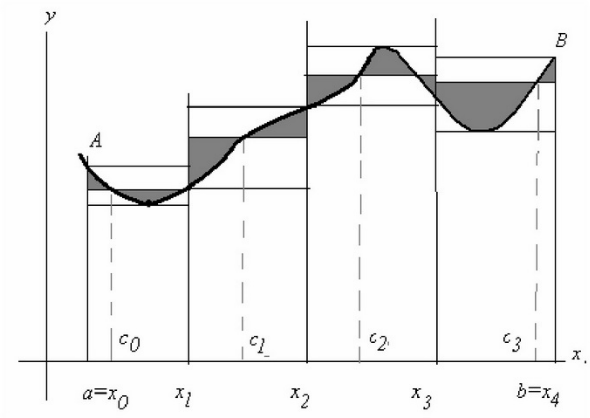
$$d_n^* = \left| S - \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left| \max_{(\Delta x_k)} f - \min_{(\Delta x_k)} f \right|\cdot\Delta x_k = S_n^+ - S_n^-$$

стремится к нулю при $\max\ \Delta x_k \to 0$ $(n\to\infty)$. Это напомнит и определение площади

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n^+ = \lim_{n\to\infty} S_n^-\ .$$

Таким образом, для дифференцируемой функции F ($f=F'$), если f непрерывна на $[a,b]$, определения 1 и 2 дают одно и то же число J.



Геометрический смысл интеграла

$$\int_a^b f\{x\}dx\ , f(x)\geq 0$$

как площади S подграфика функции или его механический смысл как массы m отрезка $[a,b]$ с переменной плотностью $\rho=f(x)\geq 0$ ссохраняются и для кратных интегралов, криволинейных и поверхностных интегралов I рода, несобственных интегралов.

Различные виды интегралов сводятся к единому определению интеграла как предела интегральных сумм.

Определение 3. Пусть функция f: $D\to R_1$ задана на области D пространства X. Разобьем D на конечное число непересекающихся подобластей D_k ($D = \bigcup_{k=0}^{n-1} D_k$) той же размерности, что и D меры $m(D_k)$. Возьмем произвольные точки M_k в областях D_k и построим интегральную сумму

$$S_n = \sum_{n=0}^{n-1} f(M_k)\cdot m(D_k)\ . \qquad (3)$$

Предел интегральных сумм S_n при

$$d = \max_k d(D_k) \to 0$$

($d\ (D_k)$ – диаметр области D_k) - число

$$J = \lim_{d\to 0} \sum_{n=0}^{n-1} f(M_k)\cdot m(D_k)$$

при условии его независимости от способа разбиения D на подобласти и выбора точек M_k называется интегралом от функции f по области D

$$J = \int_{(D)} f(M)dm\ .$$

Определение 3, повторяя и обобщая определение 2, требует уточнения слов «область», «пространство», «размерность», «диаметр области», «мера» и, разумеется, сложнее определения 1.

Легко видеть, что все разновидности интегралов сводятся к единому определению 3.

1. При $x=R_1$, $D=[a,b]$ оно дает

$$\int_a^b f(x)dx .$$

2. При $x=R_2$, D – ограниченной замкнутой области размерности 2 получаем двойной интеграл

$$\iint_{(D)} f(x,y)dxdy .$$

3. При $x=R_n$, D – ограниченной замкнутой области размерности n получаем n-мерный интеграл

$$\int_{(D)} f(M)dm .$$

4. Несобственный интеграл I-го рода (интеграл по неограниченному промежутку $[a,\infty)$, $(-\infty, b]$ или $(-\infty,\infty)$) определится как предел «собственного» интеграла, например

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx .$$

5. Несобственный интеграл II-го рода (интеграл от неограниченной в точке $x=a$ ($x=b$ или $x=c$, $a<c<b$) функции f определится как предел «собственного» интеграла, например

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx .$$

Несобственные интегралы возникают, когда область D интегрирования неограниченна или (и) содержит особые точки бесконечного разрыва подинтегральной функции, мера которых равна нулю (размерность множества точек разрыва должна быть ниже размерности области D). Вводится последовательность расширяющихся, без особых точек, ограниченных подобластей D_k области D так, что $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \ldots$ и $D=\lim_k D_k$. Если для любой такой подобласти

$$\int_{(D_k)} f(M)dm = J_k$$

и $\lim_k J_k = J$, а число J не зависит ни от способа построения последовательности D_k, ни от выбора точек $M_k \in D_k$, то оно и будет несобственным интегралом

$$\int_{(D)} f(M)dm .$$

6. Криволинейный интеграл I-го типа по гладкой дуге (AB) простой линии (L)[2] отвечает определению 3, если D – дуга (AB), плоская или пространственная. Дуга (AB) разбивается на n поддуг точками $A_0, A_1, \ldots, A_n$, лежащими на ней, и в интегральной сумме S_n дуги (A_k,A_{k+1}) заменяются длинами их хорд $|\overline{A_k A_{k+1}}|$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\left|\overline{A_k A_{k+1}}\right|,$$

$$M_k \in (A_k, A_{k+1}),\ |\overline{A_k A_{k+1}}| \to 0,$$

а предел значений S_n называется криволинейным интегралом

$$\int_{(AB)} f(M)|\overrightarrow{dr}|,$$

здесь $\overrightarrow{dr}$ - вектор - элемент касательной к дуге (AB) в ее точке M. Конечно, должна соблюдаться независимость предела от способа разбиения дуги на поддуги и выбора точек.

7. Криволинейный интеграл II-го типа

$$\int_{(AB)} \overrightarrow{a(M)}|\overrightarrow{dr}|$$

сводится к криволинейному интегралу I-го типа, если в последнем взять

$$f(M) = \overrightarrow{a(M)}\cdot\overrightarrow{dr}/|\overrightarrow{dr}| .$$

Физический смысл этого интеграла – работа по перемещению точки единичной массы силой $\bar{a}$ по направленной дуге (AB).

8. Криволинейный интеграл III-го типа

$$\int_{(AB)} \overrightarrow{a(M)}\times\overrightarrow{dr}$$

имеет смысл суммарного момента силы $\bar{a}$ при перемещении точки M по направленной дуге (AB). Если ввести вектор $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{a(M)}\cdot\overrightarrow{dr}/|\overrightarrow{dr}|$ с проекциями $f_1(M)$, $f_2(M)$, $f_3(M)$ (здесь например $f_1(M) = n\cdot\rho_{ox}\overrightarrow{f(M)}$), то каждая проекция вектора - интеграла $\vec{J} = \int_{(AB)} \overrightarrow{a(M)}\times\overrightarrow{dr}$ на соответствующую ось сведется к вычислению интеграла I-го типа.

9. Если $X=P_3$, D – ограниченная замкнутая

[2] Дуга (AB) называется гладкой, если ее вектор касательной $\vec{\tau}_0 = \overrightarrow{dr}/|\overrightarrow{dr}|$ поворачивается непрерывно от точки к точке.

Линию называют простой, если она составлена из конечного числа гладких дуг таких, что каждая дуга имеет с любой прямой, параллельной оси Ох или Оу, пересечение не более, чем в одной точке, либо по целому отрезку (для пространственной дуги вместо прямых берутся плоскости, параллельные координатным осям.

простая[3] поверхность π, то определение 3 приводит к поверхностному интегралу I-го типа

$$\int\limits_{(\pi)} f(M)\cdot|\overrightarrow{dS}|$$

где $\overrightarrow{dS}$ - вектор – элемент касательной плоскости к поверхности π в ее точке M с направлением нормали $\overrightarrow{n_O}=\overrightarrow{dS}/|\overrightarrow{dS}|$, а $|\overrightarrow{dS}|$ - площадь кусочка этой плоскости.

Физический смысл такого интеграла - масса поверхности π с переменной плотностью $\rho = f(M) \geq 0$.

Поверхностный интеграл II-го типа

$$\int\limits_{(\pi)} \overrightarrow{a(M)}\cdot|\overrightarrow{dS}|$$

сводится к интегралу I-го типа, если принять в нем $f(M)=\overrightarrow{a(M)}\cdot\overrightarrow{dS}/|\overrightarrow{dS}|$. Физический смысл – количество жидкости (газа), протекающего за единицу времени со скоростью $\bar{a}$ через поверхность – поток векторного поля $(\bar{a},\pi)$.

Поверхностный интеграл III-го типа

$$\int\limits_{(\pi)} \overrightarrow{a(M)}\times\overrightarrow{dS}$$

сводится к сумме трех интегралов первого типа (аналогично криволинейному). Поверхностный интеграл III-го типа по границе ∂D тела D называется вращением поля $(\bar{a}, \partial D)$.

10. Интеграл Лебега $J=\int\limits_{(D)} f(M)dm$ определяется через предел интегральных сумм

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\cdot m(D_k),$$

где множество D_k – прообраз промежутка $[y_k,y_{k+1})$ оси Oy при отображении области D функцией f: $D\rightarrow R_1$. Область $\mathcal{E}$ значений функции f разбиваем точками y_k на n непересекающихся промежутков

$$(\mathcal{E}\subseteq \bigcup_{k=0}^{n-1}[y_k,y_{k+1}),\ D_k=f^{1}([y_k,y_{k+1})),$$

$$D_k\subseteq \bigcup_{k=0}^{n-1} D_k\ ),$$

точка $M_k\in D_k$ выбирается в D_k произвольно , $m(D_k)$ –мера множества D_k пространства X. Предел значений S_n при $max|y_{k+1}-y_k|\rightarrow 0$ и наибольшем из диаметров $d(D_k)\rightarrow 0$) не должен зависеть ни от способа разбиения $\mathcal{E}$ на промежутки $[y_k,y_{k+1})$, ни от выбора точек $M_k\in D_k$.

Всякая интегрируемая по Риману функция f интегрируема и по Лебегу, обратное верно не всегда[4].Суммируемые по Лебегу функции образуют нормируемые пространства $L_p(D)$ с нормой

$$\|f\|=\left(\int\limits_{(D)}|f(M)|^p\ dm\right)^{1/p}.$$

Для почти всех встречающихся на практике функций интеграл Римана и интеграл Лебега совпадают.

11. Если Φ - неубывающая функция и мера промежутка $[a,b)$ на оси Ox есть

$$m([a,b))=\lim_{x\rightarrow b,x<b}\Phi(x)-\Phi(a),$$

определение 3 приводит к интегралу Стильтьеса[5]

$$(S)\int_a^b f(x)\cdot d\Phi.$$

Если при этом Ф дифференцируема, то $\Phi{=}\Phi'(x)dx$ и ,обозначая $\Phi'(x)=\ \varphi(x)$, получим интеграл с весом φ

$$(S)\int_a^b f(x)\cdot d\Phi=(R)\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx.$$

Разумеется, приведенное выше лишь схема сведения разновидностей интеграла к единому определению, но и она дает возможность с единой точки зрения трактовать различные типы интегралов, встречающихся в курсе математики технических вузов.

Заметим, кстати, что интегральная сумма

[3] Поверхность называется простой, если она составлена из кусков ($\Delta\pi$) гладких поверхностей таких, что каждый из них любая прямая, параллельная одной из координатных осей, «пронзает не более чем в одной точке. Поверхность считается гладкой, если орт нормали к ней поворачивается от точки к точке непрерывно.

[4] Лебег Ф.-Л. (1875-1941) – французский математик, создатель современной теории мера и интеграла.

Риман Г.-Ф. (1826-1866) –немецкий математик, дал, в частности, необходимые и достаточные условия интегрируемости функции (поРиману).

Функция Дирихле

$$d(x)=\begin{cases}1, \text{если } x \text{ – рациональное число}\\ 0, \text{если } x \text{ – иррациональное число}\end{cases}$$

не интегрируема по Риману. Ее интеграл по Лебегу $(L)\int_0^1 d(x)\cdot dx=0$, ибо мера множества рациональных чисел равна нулю.

[5] Стильтьес Т.-И. (1856-1894) – нидерландский математик, в частности, он пришел к обобщению интеграла, названного его именем.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k)\cdot m(D_k)$$

есть интеграл от ступенчатой функции, постоянной на каждой подобласти D_k. Интегрируемую функцию f можно представить пределом ступенчатых функций $\varphi_n(M)=f(M_k)$ на области D_n^k, так что $D_n^k=\{M: |f(M)-\varphi_n(M)|<\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$; для каждого n свое разбиение D на сумму непересекающихся подобластей $D=\sum_{k=0}^{l-1} D_k^n$,

$$S_l = \sum_{k=0}^{l-1} f(M_k)\cdot m(D_k^n) =$$

$$= \int\limits_{(D)} \varphi_n(M)dm \underset{n,l\to\infty}{\to} \int\limits_{(D)} f(M)dm.$$

Класс интегрируемых функций получается замыканием множества всех ступенчатых функций.

Отметим основные свойства интеграла:

1) линейность

$$\int\limits_{(D)} [f_1(M)+\alpha\cdot f2(M)dm =$$

$$= \int\limits_{(D)} f_1(M)dm + \alpha \int\limits_{(D)} f2(M)dm;$$

2) аддитивность

$$\int\limits_{(D_1+D_2)} f(M)dm = \int\limits_{(D_1)} f(M)dm + \int\limits_{(D_2)} f(M)dm;$$

$$D_1\cap D_2=\varnothing;$$

3) монотонность[6]: из неравенства $f(M)\leq g(M)$ на области D следует

$$\int\limits_{(D)} f(M)dm \leq \int\limits_{(D)} g(M)dm;$$

4) $\int\limits_{(D)} 1\cdot dm = m(D)$;

5) теореме существования: для всякой непрерывной на компакте D функции f существует интеграл $J=\int\limits_{(D)} f(M)dm$.

В силу единства определения 3 достаточно доказать эти свойства для одной разновидности интеграла.

Свойство 1 говорит, что интеграл есть линейный функционал J(f) над классом интегрируемых функций.

Свойства 2 и 3 определяют интеграл как аддитивную функцию над алгеброй измеримых множеств, а при $f\geq 0$ служит мерой множества D.

Каждая величина T, если она одновременно линейный функционал и аддитивная функция множеств $T=f(f,D)$, «рядится в платье интеграла».

Можно вообще определить интеграл абстрактно как *линейный функционал на классе F функций, одновременно являющийся аддитивной функцией множеств на алгебре измеримых множеств*[7].

Если $T(f,\Delta D) \approx f(M)\cdot m(\Delta D)$ и при этом $\Delta T=dT+O(|m(\Delta D)|)$, то величина T выражается интегралом $\int\limits_{(D)} f(M)dm = T(f,D)$.

Не в этом ли скрыта возможность многочисленных приложений интеграла? Именно интегралом выразятся длина, площадь, объем, масса (это все меры), статистические моменты, координаты центра тяжести, моменты силы, поток, циркуляция и вращение векторного поля.

<u>В векторном анализе</u> не только поток $\Pi=\iint\limits_{(\pi)} \overrightarrow{a(M)}\cdot\overrightarrow{dS}$, циркуляция $C=\oint\limits_{(\partial\pi)} \vec{a}\cdot\overrightarrow{dr}$, вращение $B=-\iint\limits_{(\partial D)} \overrightarrow{a(M)}\times\overrightarrow{dS}$, но и точечные характеристики поля, такие как градиент

$$(grad\ f)(M) = \lim_{d(D)\to 0} \frac{\oiint\limits_{(\partial D)} f(M)\cdot\overrightarrow{ds}}{\iiint\limits_{(D)} 1\cdot dm}, \qquad (4)$$

расходимость $(div\,\vec{a})(M) = \lim\limits_{d(D)\to 0} \dfrac{\oiint\limits_{(\partial D)} \vec{a}\cdot\overrightarrow{ds}}{\iiint\limits_{(D)} 1\cdot dm}$,

вихрь $(rot\,\vec{a})(M) = \lim\limits_{d(D)\to 0} \dfrac{-\oiint\limits_{(\partial D)} \vec{a}\times\overrightarrow{ds}}{\iiint\limits_{(D)} 1\cdot dm}$ (область D

---

[6] Свойство монотонности равносильно свойству неотрицательности интеграла: из f(M)≥0 следует

$$\int\limits_{(D)} f(M)dm \geq 0.$$

[7] Компакт – ограниченное замкнутое множество, из всякого покрытия которого открытыми множествами G_α, $F=\bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$ можно извлечь конечное покрытие $F=\bigcup\limits_{\alpha=1}^{n} G_\alpha$. Алгебра множеств - система множеств, содержащая вместе с множествами $\{A_k\}$ их объединение $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, пересечение $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ и дополнение $\bar{A}_k=X-A_k$.

стягивается в точку M - диаметр $d(D)\to 0$; ∂D – граница).

Конечно, координатное представление этих характеристик проще и чаще употребляемо:

$$grad\ f = \vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$div\ \vec{a} = \frac{\partial(a_x)}{\partial x} + \frac{\partial(a_y)}{\partial y} + \frac{\partial(a_z)}{\partial z}, \quad (5)$$

$$rot\ \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$$

но интегральное представление обладает не только большей общностьюb отсутствием требования дифференцируемости, но и очевидным физическим смыслом.

Формулы Ньютона-Лейбница, Грина-Стокса, Остроградского-Гаусса[8] связывают интеграл от дифференцируемой формы по многообразию с интегралом по ориентированному краю этого многообразия:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), F'(x) = f(x);$$

$$\iint_{(\pi)} rot\ \vec{a}\cdot\overrightarrow{dS} = \oint_{(\partial\pi)} \vec{a}\cdot\overrightarrow{dr}; \quad (6)$$

$$\iiint_{(D)} div\ \vec{a}\cdot dm = \oiint_{(\partial D)} \vec{a}\cdot\overrightarrow{dS};$$

$$\iiint_{(D)} rot\ \vec{a}\cdot dm = -\oiint_{(\partial D)} \vec{a}\times\overrightarrow{dS}.$$

Векторная форма записи этих формул удобнее для запоминания и содержательнее скалярно-координатной.

С этими формулами связан вопрос о независимости интеграла от пути интегрирования, вопрос о потенциальности поля $\oint_{(L)} \vec{a}\times\overrightarrow{dr} = 0$ по любой замкнутой линии (L) в векторном поле $(\vec{a}, D)$ и соленоидальности поля $\oiint_{(\pi)} \vec{a}\cdot\overrightarrow{dS} = 0$ на любой замкнутой поверхности (π) векторного поля. Приведенные формулы и произвольность границы (∂D) дадут эти условия в виде $rot\ \vec{a} = 0$, $div(\vec{a}) = 0$ соответственно в точке M поля $(\vec{a}, D)$.

Здесь напрашивается переход к уравнениям Лапласа $div(grad\ U)=0$ и Пуассона $div(grad\ U)=-4\pi\rho$, к задачам Дирихле и Неймана теории поля[9].

С помощью формулы Остроградского-Гаусса выводится уравнение неразрывности течения жидкости $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{a}) = 0$ и уравнение теплопроводности $c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = div(k\cdot grad\ T)$. Формулы (6) работают при выводе уравнений Максвелла[10] электромагнитного поля, без них невозможна и теория потенциала.

 Автор статьи:

Бокк
Артур Андреевич
- канд. физ.-мат.наук, доц. каф. высшей математики Тюменского нефтегазового университета

[8] Гаусс К.-Ф. (1777-1855) – великий немецкий математик, заложил основы теории потенциала, опубликовал упомянутую выше формулу.

Грин Д.(1797-1841)- английский математик и физик, в 1828г. получил известную формулу Грина.

Остроградский М.В. (1801-1861) – русский математик, в1829 г. установил упомяную формулу и ряд ее обобщений.

Стокс Д.-Г. (1819-1903) - английский математик и физик, опубликовал формулу Стокса в 1854 г.

[9] Лаплас П.-С. (1749-1827) –французский астроном, математик, физик.

Пуассон С.-Л. – французский математик и механик.

Дирихле П.-Г.-Л.(1805-1859) – немецкий математик, создатель аналитической теории чисел и автор важных работ по теории функций.

Нейман К.-Г. – (1832-1925) – немецкий математик, исследовал вторую краевую задачу.(не путать с Джоном фон-Нейманом – создателем теории автоматов –отцом ЭВМ).

[10] Максвелл Д.-К. (1831-1879) – английский физик и математик, выразил законы электромагнитного поля в виде системы четырех дифференциальных уравнений (уравнения Максвелла).