

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

**УДК 681.5.001**

**Е.А Арайс**

### АНАЛОГОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Исследуется возможность применения цепей общего вида для решения экономико-математических задач. Используется алгоритмический и программный аппарат автоматизации моделирования многокомпонентных технических устройств различной физической природы [1.2].

#### 1. Основные понятия

Введем определения, положенные в основу моделирующей системы общего назначения и обеспечивающие представление многокомпонентных устройств для автоматического моделирования.

Цепью общего вида **C** будем называть произвольную совокупность компонентов, функционирование которых описывается переменными **V**, вычисляемыми в процессе моделирования. Множество **V** будем также называть решением цепи **C**.

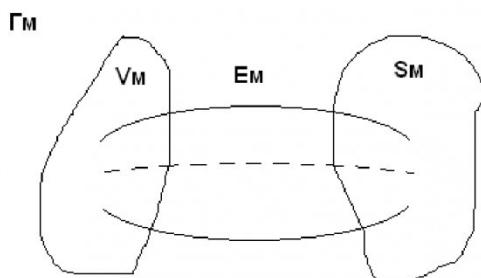


Рис. 1. Граф компонента **M**

Компонент **M** с переменными **V<sub>M</sub>** есть граф (рис.1)  $\Gamma_M = \{S_M, V_M, E_M\}$ , где **S<sub>M</sub>** – множество связей компонента, **E<sub>M</sub>** задает отображение **V<sub>M</sub>** на **S<sub>M</sub>**.

Способ отображения **E<sub>M</sub>** включает в себя также математическую модель компонента (систему уравнений или алгоритм) и способ решения математической модели. Эта особенность определения компонентов соответствует реализованному в моделирующей системе вычислительному процессу на различных уровнях (топологическом, вычислительном, для визуализации).

Цепь **C** есть граф  $\Gamma_C = (S, B, N)$  (рис.2), где **S** =  $\cup S_M$  - совокупность всех связей компонентов цепи, **N** - множество узлов, **B** - множество ветвей цепи, отображающих связи с их переменными на множество узлов **N**.

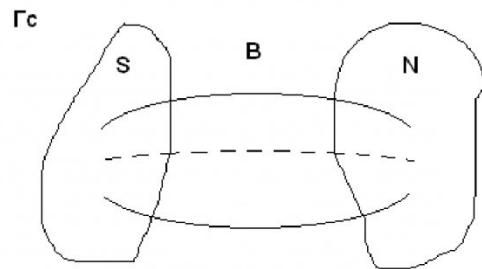


Рис.2. Граф цепи **G<sub>c</sub>**

Ветви могут быть ориентированными и неориентированными. Граф **G<sub>c</sub>** задает топологическую структуру устройства. С вычислительной точки зрения цепь **C** можно рассматривать как граф **G<sub>c</sub>** (рис.3).

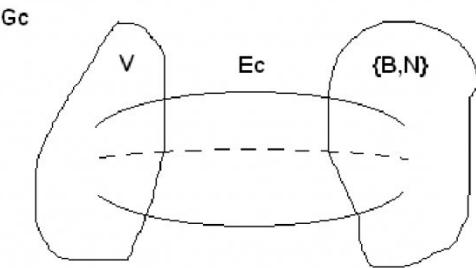


Рис.3. Граф цепи **G<sub>c</sub>**

Здесь **V** – множество переменных цепи, **{B, N}** – совокупность узлов и ветвей цепи, **E<sub>c</sub>** задает способ отображения (включает в себя математические модели компонентов, узловые топологические законы и способ разрешения совместной математической модели).

Нетрудно заметить, что введенное определение цепи имеет рекурсивный характер в силу соответствия графов  **$\Gamma_M$**  и  **$G_c$** . Рассматривая в  **$G_c$**  ветви и узлы как связи цепи, получаем возможность использования цепи в качестве компонента другой цепи. Таким образом, обеспечивается иерархическое представление сложных устройств и систем, а также иерархическая организация вычислительного процесса моделирования.

В иерархической структуре граф  **$G_c$**  будем называть также подцепью или макрокомпонентом. Во множестве ветвей и узла **{B,N}** при этом выделяется подмножество **{B<sub>Г</sub>, N<sub>Г</sub>}**, элементы которого именуются внешними ветвями и узлами и соот-

ветствуют множеству  $S_M$  графа  $\Gamma_M$ .

Общее количество  $L$  переменных цепи будем называть размерностью цепи  $C$ .

Отображения  $E_M$  и  $E_C$  включают в себя математическую модель цепи и способ её разрешения. Можно полагать, что  $E_M$  входит в  $E_C$ , поэтому дальнейшие определения вводятся для  $E_C$ .

В общем случае размерность  $L$  может быть переменной и определяться моделями компонентов. Аналогично может меняться состав  $E_C$  в целом, а также  $\{B, N\}$ . Фактически все составляющие описания цепи могут изменяться в процессе моделирования. Изменения могут быть связаны с физической вариацией структуры устройства (например, в механике при новых контактах компонентов). Кроме того, модель может изменять свое состояние в зависимости от значений переменных.

Каждый компонент  $M$  рассматривается в моделирующей системе как следующая совокупность:

$$M = (M_R, M_m, M_B, M_\Gamma, M_A, P_m).$$

Здесь  $M_R$  – топологическая информация о количестве связей компонента и составе переменных связей.  $M_m$  – совокупность математических моделей компонентов. Очевидно, что модель компонента может изменяться в зависимости от способа его применения. Поэтому и возникает необходимость наличия нескольких моделей.  $M_B$  – совокупность вычислительных методов, определенных для математических моделей из  $M_m$ .  $M_\Gamma$  – совокупность возможных графических представлений компонента, включая отображение его динамических характеристик, определяемых текущими значениями переменных  $V_M$ .  $M_A$  – совокупность критериев, определяющих выбор конкретных элементов из  $M_m, M_B, M_\Gamma$ .  $P_m$  – параметры компонента.

Введенные понятия и соответствующая программная реализация имеют достаточно общий характер и позволяют описывать для автоматического моделирования широкий класс многокомпонентных технических устройств, а также систем нетехнического характера, включая экономические.

Рассмотрим далее принципы автоматизации моделирования, основанные на введенных определениях.

Переменные  $V$  исследуемой цепи могут быть потенциальными  $V_p$  или потоковыми  $V_b$ , т.е.  $V = \{V_p, V_b\}$ . Собственно каждый шаг по времени процесса моделирования реализуется следующими этапами.

Этап 1. Опрос моделей компонентов цепи  $M_R$  и построение матрицы инциденций для  $V_p$  и  $V_b$ . При этом индексы переменных компонентов  $V_M$  перевычисляются в индексы решения цепи  $V$ , так как  $V = U V_M$ .

Этап 2. Формирование системы линейных алгебраических уравнений, задающих узловые топологические законы. Это закон равенства одно-

именных потенциальных переменных, инцидентных одному и тому же узлу, и закон равенства нулю суммы одноименных потоковых переменных, инцидентных одному и тому же узлу. Примером может служить закон Кирхгофа для токов. Для потенциальных переменных закон равенства реализуется выбором общего индекса переменных из  $V_p$ . Для потоковых переменных дополнительно используется информация из паспорта компонента. Так, например, при использовании графов связей, моделирующих узловые законы специальными компонентами, уравнения для потоковых переменных не строятся.

Этап 3. Опрос  $M_m$  – математических моделей компонентов. При этом в соответствии с  $M_B$  строится система линеаризованных уравнений (по формулам численного интегрирования для обыкновенных дифференциальных уравнений, конечно-разностной аппроксимации для уравнений в частных производных или итерационных методов для нелинейных уравнений).

Этап 4. Решение совокупной системы линейных алгебраических уравнений. Определяется решение цепи  $V$  для очередного шага по времени или очередной итерации.

Этап 5. Для вычисленного решения цепи  $V$  производится визуализация результатов моделирования в соответствии с  $M_\Gamma$ .

В целом процесс моделирования управляется заданием на моделирование. Так, например, для динамических процессов требуется задание интервала времени ( $T_{min}, T_{max}$ ). Этот интервал входит в задание наряду с прочей информацией о способе визуализации, требуемой точности и так далее.

## 2. Моделирование производства

Рассмотрим принципиальную схему модели производственного процесса (рис. 4).

Источник сырья и покупных комплектующих моделируется источником Е. Производственные участки моделируются компонентами Р1, Р2, ..., Рn. Склад готовой продукции – S. Модели компонентов в данном случае реализуются алгоритмами. В практически решенных задачах моделирования производства учитывалось время прохождения через каждый участок, ограничения по исходному сырью, резервы производственных участков. В данном случае связи компонентов являются ориентированными. На связях действуют переменные, описывающие объемы и типы произведенной продукции.

Для корректной работы моделирующей системы используется предварительная сортировка компонентов, соответствующая ориентации связей.

Применялся метод статистических испытаний для оценки гарантированного выпуска продукции.

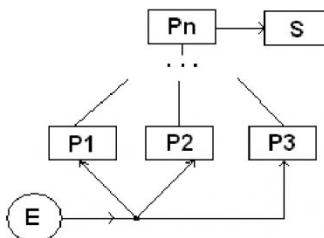


Рис. 4. Структура производственного процесса

Очевидно, что данная схема является достаточно условной. Эффективность и точность моделирования определяется точностью моделей компонентов и количеством учитываемых факторов. Модели компонентов организованы по принципу вход-выход и все переменные интерпретируются как потенциальные. Построения и решения системы уравнений не требуется. Фактически, из моделирующей системы в данном случае используется графическая оболочка и сервисная программа построения моделей компонентов.

При построении необходимой библиотеки моделей компонентов (уникальной для каждого типа производства) система успешно решает практические задачи, аналогичные задачам, решаемым в многочисленных системах моделирования экономических систем.

Однако такие системы не учитывают важной особенности реального производства. Производственные участки должны быть обеспечены электричеством, водой, подачей сжатого воздуха и так далее. Это обеспечение имеет естественные ограничения, которые должны учитываться в модели. Должна учитываться и стоимость расходных ресурсов.

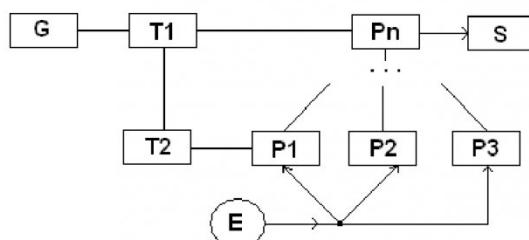


Рис. 5. Схема производства с сетью водоснабжения

На рис. 5 представлена условная схема производства с сетью водоснабжения.

Компонент G – источник давления (водоснабжения), T1, T2 – сети водоснабжения. Компоненты  $P_i$  включают в себя блок контроля необходимого давления.

Сеть водоснабжения принципиально не может быть смоделирована соотношением вход-выход. Так, например, ламинарное гидросопротивление (отрезок трубы) описывается уравнением  $P_1 - P_2 - R \cdot Q = 0$ . Здесь  $P_1, P_2$  – давления на концах трубы,

$Q$  – расход,  $R$  – значение гидросопротивления. Понятия вход и выход для такого компонента просто не существует. В общую модель производства требуется включение уравнений. Моделирование требуется производить в соответствии с описанным выше алгоритмом.

Современное производство имеет большое количество обеспечивающих сетей различного типа. Пренебречь ими можно только в случае избыточного резерва мощностей этих сетей. Однако, с учетом стоимости энергоресурсов, говорить об экономической эффективности такого производства не приходится.

Допускается решение обратных задач. Входом (склад на рис.4) является потребность в производстве продукции. При наличии соответствующих моделей компонентов производится расчет времени производства, потребности в ресурсах и себестоимости продукции. Для оптимизации загрузки оборудования и себестоимости используются модификации метода погонок [2] или алгоритмы динамического программирования.

Последние могут потребовать чрезмерных затрат машинного времени, недопустимых при оперативном управлении производством.

Можно привести примеры, когда решения по управлению требуется принимать очень быстро, в том числе и в автоматическом режиме для предотвращения аварийных ситуаций.

### 3. Транспортная задача

Рассматриваются некоторые экономические задачи, основанные на аналоговом представлении экономических процессов.

Аналоговым будем называть описание компонентов экономических систем с использованием потенциальных и потоковых переменных. Комбинаторные методы оптимизации заменяются при аналоговом эквивалентировании моделированием соответствующих цепей общего вида.

Простейшим вариантом является оптимальное распределение груза по транспортной сети (рис. 6).

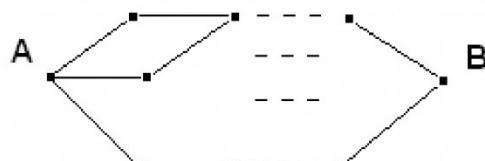


Рис.6. Транспортная сеть

Из пункта А в пункт В требуется доставить груз объемом Z с минимизацией транспортных затрат. Ребрам неориентированного графа соответствует стоимость перевозки Р. Моделируем затраты компонентами R (рис. 7).

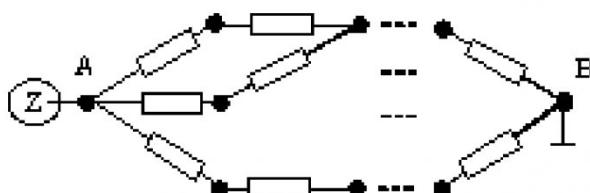


Рис. 7. Модель сети

Распределяемый груз моделируется источником потоковой переменной  $Z$ . Точка назначения В моделируется заземлением. Линейные модели типа  $V1-V2 - R \cdot J = 0$ , где  $V1, V2$  - потенциалы на концах ребра,  $J$  - потоковая переменная, моделирующая объем груза через  $R$ , непригодны. Выбор оптимального пути по принципу минимального тока  $J$  может привести к заведомо тупиковому результату за счет возможного большого распараллеливания (рис.8).

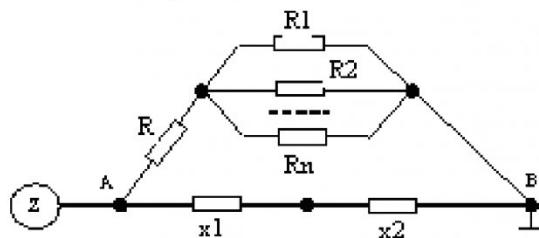


Рис. 8. Параллельная транспортировка

При достаточно большом  $n$  максимальный ток реализуется на компоненте  $R$ , хотя оптимальный является путь через  $r_1, r_2$ . Для исключения этой ситуации вводится нелинейная характеристика параметра  $R$  в уравнении  $U_1 - U_2 - R \cdot J = 0$ . На рис. 9 представлена значение  $R$  в зависимости от объема груза  $P$ .

Участок  $(0, x_1)$  характеризует стоимость малых объемов, когда транспортные расходы становятся постоянными. Так, перевозка одной спички на грузовике равна по стоимости перевозке коробка спичек. Участок от  $x_2$  и более моделирует ограничения пропускной способности участка.

Выбирая правильную крутизну начального участка для  $R$ , получаем оптимальное или близкое к оптимальному распределение потоков в транспортной сети.

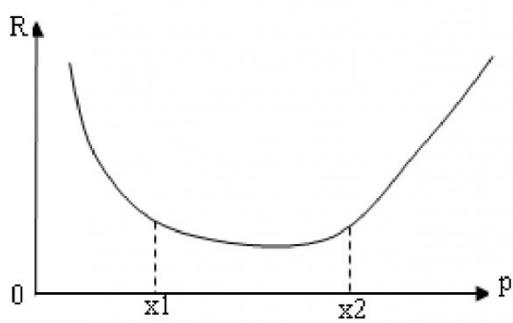


Рис. 9. Нелинейная модель

При необходимости учета затрат, связанных со временем прохождения участка, соответствующие убытки включаются в стоимость прохождения участка.

Задача на рис. 8 решается корректно для малых значений  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , так как  $n$  может быть на практике большим, но ограниченным. В то же время, значение  $R$  растет при приближении к нулю неограниченно.

Путь или совокупность путей транспортировки определяется выбором наибольших токов в последовательности участков. Таким образом, может быть получен один или несколько путей для транспортировки. Заметим, что для поиска единственного оптимального пути этот метод также применим. Известный алгоритм пометок [2] для поиска минимального пути в графе требует фиксированного веса ребер графа. На практике характеристики являются переменными и нелинейными.

#### 4. Оптимальное распределение ресурсов

Рассматривается задача распределения ресурсов по объектам, когда использование ресурса может приносить различный эффект для различных объектов. Эффективность  $S$  для использованного ресурса может быть представлена графиком на рис. 10.

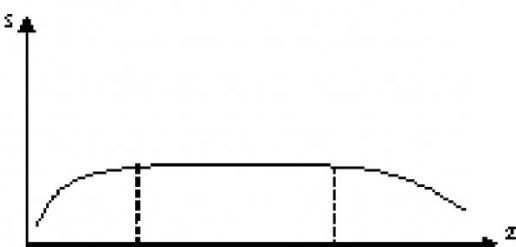


Рис. 10. График эффективности

Здесь  $Z$  – распределение ресурса,  $S$  – эффективность. Очевидно, что в момент  $x$  наступает насыщение и эффективность не возрастает (например, в сезон насыщения рынка). Для значений более  $x_1$  эффективность падает за счет излишков постулаемого ресурса (нереализуемые запасы товара). Эквивалентная схема для решения задачи распределения представлена на рис. 11.

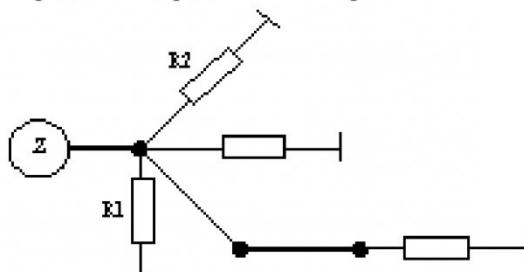


Рис.11. Схема для задачи распределения

Сопротивление  $R$  обратно пропорционально значению  $S$  (рис. 10). На участках сети могут быть включены компоненты, моделирующие транспортные расходы. Кроме того, параллельно  $R_i$  могут быть включены компоненты, моделирующие потери за счет отсутствия ресурса (потери за счет сокращения ассортимента).

Очевидно, что полученные результаты имеют

весьма приближенный характер. Однако, учитывая, что решение принимается в условиях неполной определенности и зависит от многих дополнительных факторов, эти результаты вполне могут быть использованы в качестве рекомендательных и как контрольные, во избежание грубых ошибок при принятии решений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арайс Е.А., Дмитриев В.М. Моделирование неоднородных цепей и систем на ЭВМ. - М.: Радио и связь, 1982, 160с.
2. Арайс Е.А., Дмитриев В.М. Автоматизация моделирования многосвязных механических систем. - М.: Машиностроение, 1987, 240 с.

□Автор статьи:

Арайс  
Евгений Александрович  
- докт.техн.наук (Рижский  
Технический Университет)

**УДК 656.135.073**

**А.Ю. Тюрин**

## ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДОСТАВКИ МЕЛКОПАРТИОННЫХ ГРУЗОВ

Эффективность доставки мелкопартионных грузов зависит от своевременной подготовки отгрузочных партий, разработки сроков завоза продукции и маршрутизации перевозок. При этом особую трудность вызывает составление развозочных маршрутов доставки грузов, так как для больших сетей решение этой задачи точными методами приводит к значительным затратам времени.

В связи с этим в данной статье рассматриваются вопросы применения эвристических методов решения задачи развоза продукции. Среди известных методов широко применяется метод Кларка-Райта [1], построенный на экономии при объединении маятниковых маршрутов в развозочные. Однако данный метод имеет ряд существенных недостатков, среди которых можно выделить нечеткий выбор транспортного средства при формировании маршрута, неправильное построение порядка

объезда пунктов на маршруте, приводящее к увеличению общего пробега подвижного состава, возможность зацикливания (отсутствие конечного результата) при решении задачи на ЭВМ.

Данные недостатки можно частично устранить, используя метод сумм при решении задачи коммивояжера, перестановкой пар пунктов в предварительном маршруте.

Дальнейшим развитием метода Кларка-Райта стал эвристический способ решения задачи развозки на основе обобщенной задачи назначения, разработанный Фишером и Якумаром [2].

Рассмотрим данный алгоритм подробнее, используя следующие обозначения:  $n$  – число пунктов сети, отправитель (склад) имеет номер  $n$ ,  $p$  – число неоднородных транс-

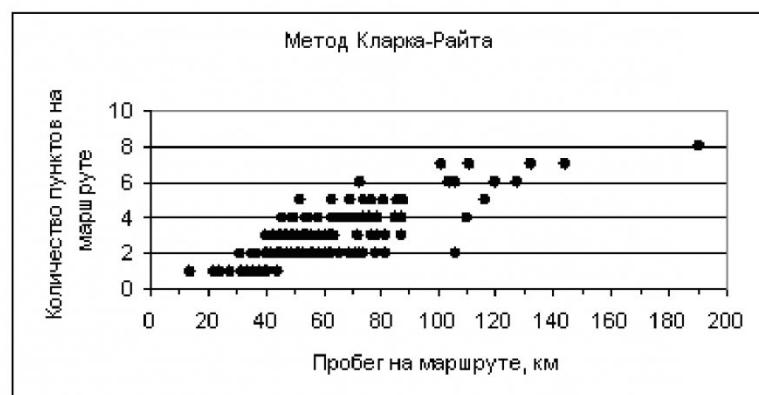


Рис. 1. Диаграмма «количество пунктов - пробег» для 186 маршрутов, полученных методом Кларка-Райта