

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

**УДК 622.8222: 622.02: 519.6**

**Н.В. Трушникова**

### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕМНЫХ ТЕПЛОВЫХ ИСТОЧНИКОВ В МАССИВЕ ГОРНЫХ ПОРОД ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ГРАДИЕНТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА НА ПОВЕРХНОСТИ**

Процессы тепло и массообмена в угольных средах (например, на разрезах, в шахтах, местах хранения угля и т. д.) могут привести к образованию источников тепла за счет самонагревания углей. В дальнейшем становится возможным процесс самовозгорания угля, что может привести как к экономическим потерям, так и к экологическим проблемам [1–3].

Физико-химические механизмы возникновения очагов тепловыделения зависят от большого количества факторов: геологических условий залегания пластов и их мощности, строения и химического состава углей, диффузии кислорода из атмосферы и т.д. [1,2,4].

Следует отметить, что единой теории и соответствующей математической модели, описывающей физико-химические процессы при самонагревании и самовозгорании углей, не существует. Поэтому актуальна задача локации объемных источников тепла в угольных средах, решение которой может быть найдено с помощью методов обратных задач с использованием экспериментальных данных. В частности, из решения обратных задач можно получить информацию о геометрических размерах и форме очага тепловыделения [6], что может быть использовано при проведении профилактических работ по тушению очагов самовозгорания на начальных стадиях процесса [1,2].

Существуют различные экспериментальные методы регистрации очагов тепловыделения. Например, измерение потенциала электрического поля (или его градиента), создаваемого тепловым источником [3,5,7,8], или же определение распределения температуры на дневной поверхности тепловизорами. Переход от температуры к электрическому потенциальному осуществляется по известной формуле связи между вариациями потенциала электрического поля и полем температуры [3,5,8]. Перечисленные способы имеют свои преимущества и недостатки, что обусловлено физическими процессами и конструктивными особенностями аппаратуры. Поэтому, желательно их "совместное" применение при проведении экспериментов. Это позволит повысить достоверность получаемых экспериментальных данных необхо-

димых при решении обратных задач.

В [10] приведены результаты по восстановлению границы теплового источника для плоской задачи на основе экспериментально измеренного электрического потенциала из работы [5].

В данной работе рассматривается пространственный случай – восстановление поверхности объемного теплового источника в массиве.

На рис. 1. представлена геометрическая иллюстрация решаемой пространственной задачи: источник тепловыделения расположен в области  $D$  с границей  $\ell(\varphi, \theta)$ , где  $\varphi, \theta$  – значения соответствующих углов в сферической системе координат  $(\varphi, \theta, l)$ , привязанной к декартовой системе  $(\xi, \tau, \eta)$ ;  $\Delta\varphi(x, y)$  – градиент потенциала  $\varphi$ , измеряемый на дневной поверхности  $z=0$  в

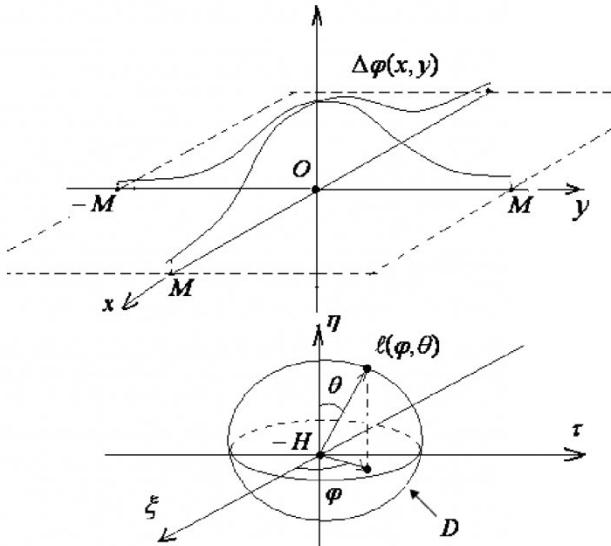


Рис. 1. Геометрическая интерпретация задачи в пространстве  $R^3$ .

области  $[-M, M] \times [-M, M]$ .

Решение обратной задачи сводится к восстановлению поверхности области  $D$  по измеряемому градиенту потенциала электрического поля  $\Delta\varphi$  на дневной поверхности:

$$\Delta\varphi(x_0, y_0, 0) = \frac{\partial\varphi(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \Big|_{z_0=0},$$

где  $x_0, y_0, z_0$  – координаты точек измерений.

Предполагается, что область  $D$  - выпуклая и известны координаты, по крайней мере, одной точки, находящейся внутри  $D$ , занимаемой тепловым источником. Используя сферическую систему координат  $(\varphi, \theta, R)$ , область  $D$  может быть задана в виде:

$$D = \left\{ (\varphi; \theta; R) : 0 \leq R \leq \ell(\varphi, \theta), \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi \end{array} \right\},$$

где функция  $\ell = \ell(\varphi, \theta)$  - уравнение поверхности области  $D$ .

Искомая функция поверхности очага тепловыделения  $l = l(\varphi, \theta)$  определяется из следующего нелинейного интегрального уравнения первого рода (см. [6]):

$$\psi_1(x_0, y_0) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} K(x_0, y_0, \varphi, \theta, \ell(\varphi, \theta)) d\theta, \quad (1)$$

где

$$\psi_1(x_0, y_0) = -\Delta\varphi(x_0, y_0, 0) / k,$$

$k$  - эффективная плотность электрических зарядов на поверхности  $D$ ;

$$K(x_0, y_0, \varphi, \theta, \ell(\varphi, \theta)) = \sin \theta \times \left[ \begin{array}{l} -(a^2 - b^2) \sqrt{\ell^2(\varphi, \theta) - 2b\ell(\varphi, \theta) + a^2} \end{array} \right]^{-1} \times \left[ \begin{array}{l} \times (a^2 [Hb + c(2a^2 - 3b^2)] + [H(a^2 - 2b^2) - \\ - cb(5a^2 - 6b^2)]\ell(\varphi, \theta) + \\ \times c(a^2 - b^2)\ell^2(\varphi, \theta)) + (H - 3bc) \times \\ \times \ln \frac{\sqrt{\ell^2(\varphi, \theta) - 2b\ell(\varphi, \theta) + a^2} + \ell(\varphi, \theta) - b}{a - b} \\ + \frac{a[Hb + c(2a^2 - 3b^2)]}{a^2 - b^2} \end{array} \right]$$

$$a^2 = x_0^2 + y_0^2 + H^2,$$

$$b = (x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi) \sin \theta + H \cos \theta,$$

$$c = \cos \theta, \quad a > |b|.$$

Так как входные данные задачи  $\Delta\varphi(x_0, y_0, 0)$  определяются из эксперимента с погрешностью  $\delta > 0$  и задача (1) некорректна (неустойчива), то для численного решения следует применять регуляризующие алгоритмы.

Численный алгоритм решения уравнения (1), реализованный в виде  $m$ -функций в среде MATLAB 6.X, состоит из следующих шагов.

1) В области

$$D_1 = \{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

вводится сетка:

$$\varphi_k = kh_\varphi, h_\varphi = 2\pi / N_1;$$

$$\theta_j = jh_\theta, h_\theta = \pi / N_2;$$

$$k = 1, 2, \dots, N_1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2,$$

$N_1$  и  $N_2$  - число точек разбиения.

2) Двойной интеграл в (1) заменяется кубатурной формулой

$$\begin{aligned} \psi_1(x_0^n, y_0^m) &= \\ &= \sum_{k=1}^{N_1} h_\varphi \sum_{j=1}^{N_2} K(x_0^n, y_0^m, \varphi_k, \theta_j, \ell_{kj}) h_\theta \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\ell_{kj} = \ell(\varphi_k, \theta_j)$ ;  $x_0^n, y_0^m$  – узлы в сеточной области

$$S_M = \{-M_1 < x_0^n < M_1, \\ -M_2 < y_0^m < M_2\};$$

$M_1$  и  $M_2$  - характерные размеры области, в которой измеряется градиент потенциала электрического поля

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi(x_0^n, y_0^m, 0); \quad n, m = -N \dots N.$$

3) Система нелинейных уравнений (2) переписывается в виде:

$$F(\bar{\ell}) = \bar{z}, \quad (3)$$

где  $F(\dots)$  - вектор-столбец из (2);  $\bar{\ell} = \{\ell_{kj}\}$  - вектор размерности  $N_1 \times N_2$  (искомое решение), а  $\bar{z} = \{\psi_1(x_0^n, y_0^m)\}$  – задаваемая из эксперимента правая часть (вектор размерности  $(2N+1)^2$ ). Ясно, что должно быть выполнено условие совместности системы:  $(2N+1)^2 \geq N_1 N_2$ , т.е. число уравнений больше числа неизвестных.

4) Система (3) решается с помощью регуляризованной модификации итеративного метода Левенберга-Маркварда (см. [9], где приведены также условия сходимости и устойчивости данного метода).

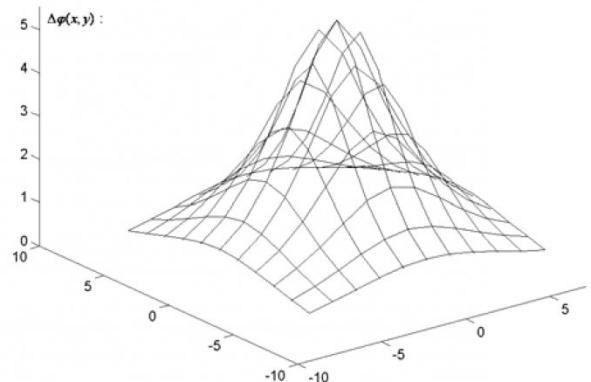


Рис. 2. Распределение градиента потенциала на дневной поверхности  $z=0$

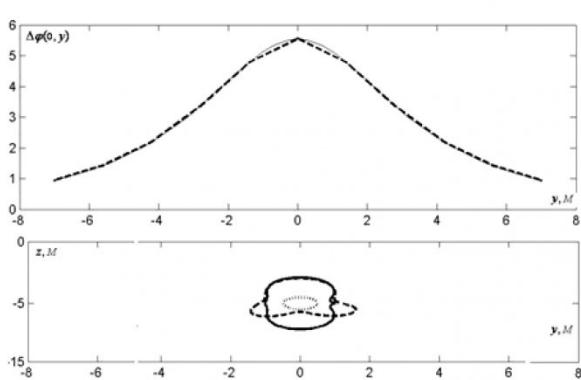


Рис. 3. Распределение градиента потенциала  $\Delta\phi(0,y)$  (верхний рисунок) и результаты восстановления формы теплового источника при начальном приближении – сфере радиуса  $R_0=0.5$  (нижний рисунок)

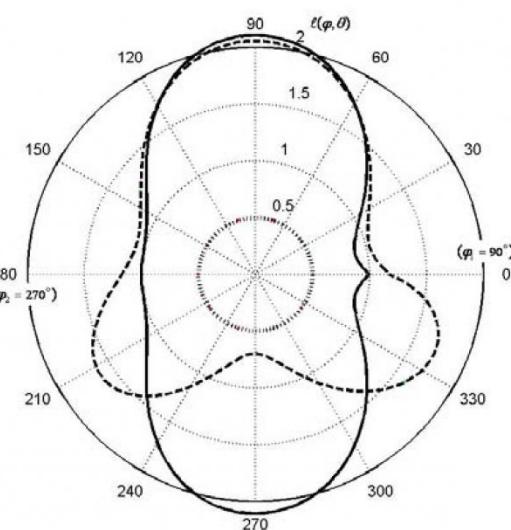


Рис. 4. Графики точного (сплошная линия) и восстановленного (пунктирная линия) решений при начальном приближении – сфере радиуса  $R_0=0.5$

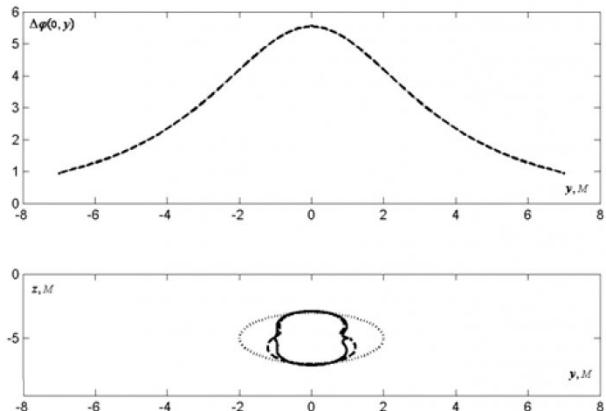


Рис. 5. Распределение градиента потенциала  $\Delta\phi(0,y)$  (верхний рисунок) и результаты восстановления формы теплового источника при начальном приближении – сфере радиуса  $R_0=2$  (нижний рисунок)

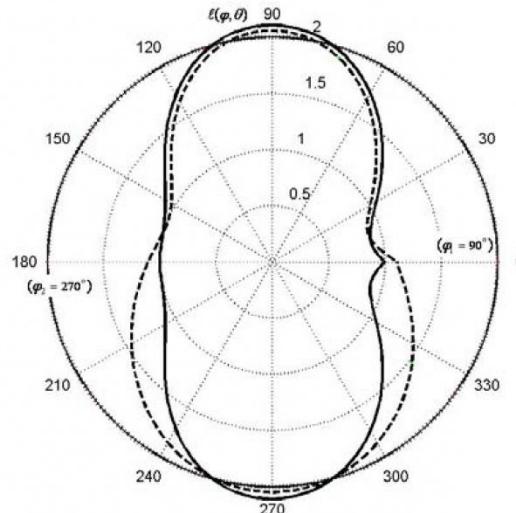


Рис. 6. Графики точного (сплошная линия) и восстановленного (пунктирная линия) решений при начальном приближении – сфере радиуса  $R_0=2$

Была проведена серия тестовых и модельных расчетов для случая, когда очаг тепловыделения, распределенный в области  $D$ , представлен в виде эллипсоида произвольной формы при различных уровнях среднеквадратической погрешности входных данных  $\delta$ .

На рис. 2 дано распределение градиента электрического потенциала  $\Delta\phi(x_0^n, y_0^m)$  (в относительных единицах) для тестового примера, где тепловой источник имел форму эллипсоида с центром в точке  $(0, 0, -H)$  ( $\xi_0 = \tau_0 = \eta_0 = 0$ ), полуосами  $a_0=3$ ,  $b_0=1$ ,  $c_0=2$  и углом поворота  $e_0=45^\circ$  относительно оси  $\tau$ .

Так как решаемое уравнение (1) нелинейное, то существенным фактором, при использовании

итеративных методов, является выбор начального приближения (нулевой итерации). За начальное приближение выбиралась сфера радиуса  $R_0$ .

На рис. 3–6 представлены результаты сравнения точного решения (граница очага источника тепловыделения) и приближенно восстановленной границы в сечениях эллипсоида полуплоскостями  $\varphi=90^\circ$  и  $\varphi=270^\circ$  (как в декартовой (рис. 3,5), так и в сферической системе координат (рис. 4,6)).

Результаты получены при начальных приближениях – сферах радиусов  $R_0=0.5$  и  $R_0=2$  в прямоугольной области  $[-7,7] \times [-7,7]$  в тестовом примере.

В верхней части рис. 3,5 даны распределения градиента электрического потенциала  $\Delta\phi(x,y)$  истинного (сплошная линия) и "создаваемого" восстановленным источником тепловыделения

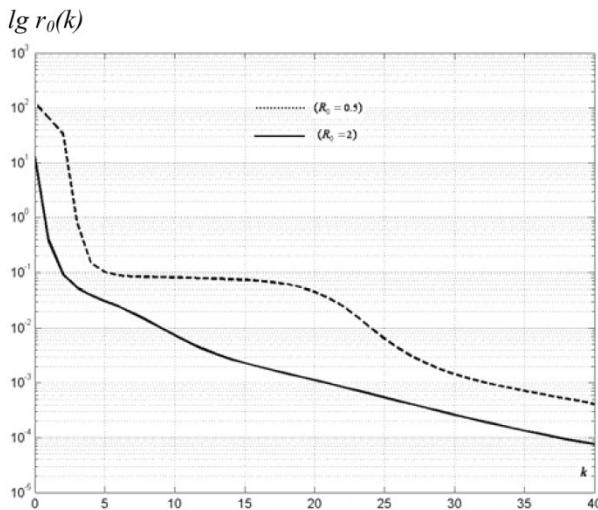


Рис. 7. Поведение невязки  $r_0(k) = \|F(\ell^k) - \bar{z}\|$  в логарифмическом масштабе. Начальное и конечное значения функционала невязки:  
 $r_0(\text{нач})=124.9693$ ,  $r_0(\text{кон})=0.4163 \cdot 10^{-3}$  ( $R_0=0.5$ ),  
 $r_0(\text{нач})=12.9912$ ,  $r_0(\text{кон})=0.7616 \cdot 10^{-4}$  ( $R_0=2$ )  
(пунктирная линия).

В нижней части рис. 3,5 представлены "истинная" граница источника (сплошная линия) и

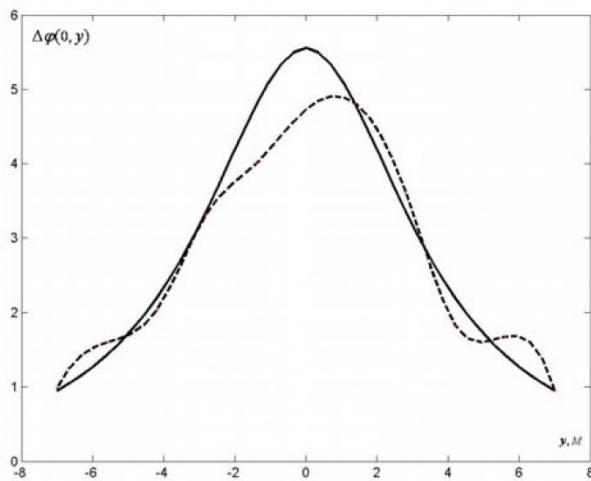


Рис. 8. Распределения градиентов потенциала: "точного" (сплошная линия) и "воздушенного" (пунктирная линия) при  $\delta \approx 10\%$ .

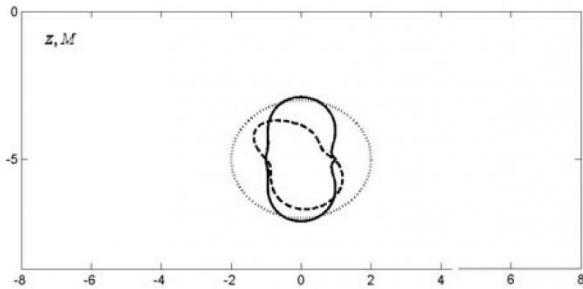


Рис. 9. Графики начального (пунктирная линия), точного (сплошная линия) и восстановленного (пунктирная линия) решений при  $\delta \approx 10\%$ .

восстановленная (пунктирная линия) в декартовых координатах при начальных приближениях  $R_0=0.5$  и  $R_0=2$  соответственно.

Наряду с выбором числа итераций, проводился "контроль" счета по невязке  $r_0(k) = \|F(\ell^k) - \bar{z}\|$ , где  $\ell^k$  -  $k$ -я итерация.

Поведение логарифма невязки  $\lg r_0(k)$  в зависимости от числа итераций  $k$  и начальных приближений  $R_0=0.5$  и  $R_0=2$  дано на рис. 7. Удовлетворительные результаты в большинстве тестов были получены в среднем за 40 итераций.

Выполненный численный анализ позволяет сделать следующий практический вывод: начальное приближение следует выбирать в виде сферы с внутренним источником тепловыделения.

Далее на модельных примерах рассмотрена обратная задача, когда относительная среднеквадратическая погрешность измерительной аппаратуры  $\delta \neq 0$ . На основе тестовых расчетов оценивается уровень погрешности  $\delta$ , при котором можно получить удовлетворительные результаты по восстановлению формы очага тепловыделения. Ясно, что полученная оценка величины  $\delta > 0$ , носит приближенный характер (из теории некорректных задач  $\delta$  должна стремиться к нулю). Тем не менее, эта оценка может быть использована при выборе параметров измерительной аппаратуры и при обработке данных в конкретных задачах определения формы очагов тепловыделения.

В модельных задачах в качестве точного решения (так называемого квазирешения по В.К. Иванову [11]) используется эллипсоид с центром в точке  $(0, 0, -H)$  ( $\xi_0 = \tau_0 = \eta_0 = 0$ ), полуосами  $a_0=3$ ,  $b_0=1$ ,  $c_0=2$  и углом поворота  $e_0=45^\circ$  относительно оси  $\tau$ .

Подставляя задаваемое таким образом решение в (1) и вычисляя правую часть уравнения  $\psi_1(x_0, y_0)$ , будем вносить случайные ошибки в значения  $\psi_1(x_0^n, y_0^m)$  по формуле:

$\tilde{\psi}_1(x_0^n, y_0^m) = \psi_1(x_0^n, y_0^m) \cdot (1 + \varepsilon \cdot \xi_{nm})$ ,  
 $n, m = -N \dots N$ , где  $N$  - число узлов разбиения в сеточной области  $S_M$ ,  $\xi_{nm} \in (-1, 1)$  - псевдослучайные числа с равномерным законом распределения,  $\varepsilon > 0$  - задаваемая в модельных расчетах величина погрешности измерений  $\tilde{\psi}_1$ .

Среднеквадратическая погрешность  $\tilde{\psi}_1$

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \sum_n \sum_m [\tilde{\psi}_1(x_0^n, y_0^m) - \psi_1(x_0^n, y_0^m)]^2 = \\ &= \varepsilon^2 \sum_n \sum_m \xi_{nm}^2 \psi_1^2(x_0^n, y_0^m). \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, в расчетах, задавая различные значения  $\varepsilon$ , можно моделировать разный уровень относительной погрешности входных данных:

$$\delta = \frac{\Delta}{\left( \sum_{n,m} \psi_1^2(x_0^n, y_0^m) \right)^{1/2}} \cdot 100\%$$

Из (4) и очевидного неравенства  $|\xi_{nm}| \leq l$  (для всех  $n, m$ ), имеем оценку:  $\delta/100 < \varepsilon$ .

С помощью разработанных компьютерных программ *nelin.m* и *ed3.m* были проведены модельные расчеты при различных "размерах" эллипсоида и уровнях погрешности  $\delta$ .

На рис. 8 изображены распределения градиента потенциала  $\Delta\varphi$  (сплошная линия), соответствующее точному решению и  $\Delta\tilde{\varphi}$  (пунктирная линия), на которое накладывалось псевдослучайное возмущение с относительной погрешностью  $\delta \sim 10\%$ . Форма источника  $\tilde{l}(\varphi, \theta)$ , восстановленного по возмущенному потенциалу, а также точное решение  $l(\varphi, \theta)$  (в сечении эллипсоида полуплоскостями  $\varphi_l=90^\circ$  и  $\varphi_l=270^\circ$ ) представлены на рис. 9. За начальное приближение бралась сфера радиуса  $R_0=2$ .

На рис. 10 приведены графики поведения невязки  $r_0(k)$  для соответствующих значений  $\delta$ .

Анализ полученных результатов показывает

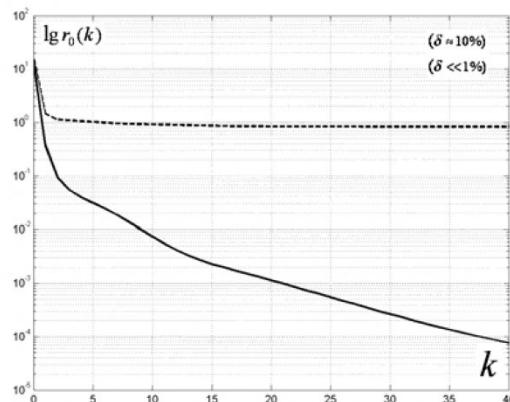


Рис. 10. Поведение невязки  $r_0(k)$  при разных значениях погрешности  $\delta$ .

удовлетворительное согласование "истинной" формы (границы) очага тепловыделения  $l(\varphi, \theta)$  и "восстановленной"  $\tilde{l}(\varphi, \theta)$ .

В заключение, отметим, что применение регуляризующих итеративных алгоритмов может быть эффективным средством как для локации очагов тепловыделения, так и при решении других обратных задач: сейсмики, теплопроводности, медицины и т.д.

Автор благодарит профессора Д.В. Алексеева за обсуждение работы и ценные замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линденау Н.И., Маевская В.М., Крылов В.Ф. Происхождение, профилактика и тушение эндогенных пожаров в угольных шахтах – М.: Недра, 1977, с. 319
2. Глузберг Е.И. Теоретические основы прогноза и профилактики шахтных эндогенных пожаров – М.: Недра, 1986, с. 160
3. Тарасов Б.Г., Иванов В.В., Дырдин В.В., Фокин А.Н. Физический контроль массивов горных пород – М.: Недра, 1994, с. 240
4. Агроскин А.А. Физические свойства углей – М.: Металлургиздат, 1961, с. 308
5. Кроль Г.В. Разработка электрометрического способа контроля самонагревания и самовозгорания каменного угля на разрезах. Канд. дисс., ВостНИИ, Кемерово, 1983, с. 195
6. Трушникова Н.В. Об определении формы объемного теплового источника в массиве горных пород по измерениям электрического потенциала на поверхности // Геодинамика и напряженное состояние недр Земли. Труды международной конференции. – Новосибирск, ИГД СО РАН, 2001, с. 165–167
7. Хямяляйнен В.А., Простов С.М., Сыркин П.С. Геоэлектрический контроль разрушения и инъекционного упрочнения горных пород – М.: Недра, 1996, с. 287
8. Алексеев Д.В., Егоров П.В. Механизм формирования квазистационарного электрического поля в массиве горных пород при наличии естественных и техногенных тепловых источников // ФТПРПИ, 1994, № 5, с. 3–7
9. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. Итеративные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами – М.: УРСС, 2002, с. 190
10. Трушникова Н.В. Восстановление формы теплового источника в массиве по измеренному электрическому потенциалу на поверхности // Вестн. КузГТУ, № 2, 2005, с. 91 – 93
11. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. – Екатеринбург: УИФ, «Наука», 1993, с. 263

□Автор статьи:

Трушникова

Надежда Васильевна

- ст. преп. каф. высшей математики