УДК 517.5

П.Н.Подкур

О N-МАСШТАБИРУЕМОСТИ В-СПЛАЙНОВ

Теория вейвлетов [1] имеет широкие применения в обработке одномерных сигналов и изображений. В основе этой теории лежит понятие масштабирующей функции. Для коэффициента масштабирования $N = 2$ теория вейвлетов развита в значительной степени. В случае $N>2$ известно [1], что можно построить аналогичную теорию, которая позволит осуществлять разложение сигнала N фильтрами. Развитие этого направления обработки сигналов тормозится тем, что до сих пор нет достаточного числа примеров масштабирующих функций, соответствующих коэффициенту $N>2$. Ниже показано, что B-сплайны являются N-масштабирующими функциями для любого $N>1$, найдено общее выражение коэффициентов масштабирующего фильтра и приведен пример несплайновой N-масштабирующей функции.

Пусть $N>1$ – целое число, $\mathbf{Z}$ – множество всех целых чисел и $L^2(\mathbf{R})$ – пространство функций на числовой прямой $\mathbf{R}$, интегрируемых с квадратом.

Определение 1. *Функция $\varphi(x)\in L^2(\mathbf{R})$ называется N-масштабирующей, если она может быть представлена в виде*

$$\varphi(x) = \sqrt{N}\sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n\varphi(Nx-n), \tag{1}$$

где числа h_n, $n\in\mathbf{Z}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} |h_n|^2 < \infty.$$

Равенство (1) *называется масштабирующим уравнением. Набор $\{h_n\}_{n\in Z}$ коэффициентов разложения в уравнении* (1) *называется масштабирующим фильтром.*

Сделаем преобразование Фурье масштабирующего соотношения (1). Поскольку

$$\varphi(Nx-n)=\varphi(N(x-n/N)),$$

то

$$F[\varphi(Nx-n)] = \frac{1}{N}e^{-in\omega/N}F[\varphi](\omega/N).$$

Поэтому

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n\, e^{-in\frac{\omega}{N}}\,\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{N}\right).$$

Положим

$$H_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n\, e^{-in\omega}, \tag{2}$$

тогда

$$\hat{\varphi}(\omega) = H_N\left(\frac{\omega}{N}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{N}\right). \tag{3}$$

Соотношение (3) также называется масштабирующим уравнением. Функцию $H_N(\omega)$ будем называть частотной функцией масштабирующей функции $\varphi(x)$.

Хорошо известно [1], что B-сплайны являются 2-масштабирующими функциями. Напомним, что *сплайном порядка n* называется функция $f(x)$, которая является полиномом степени, не более чем n на каждом интервале $[k, k+1)$ и $n-1$ раз непрерывно дифференцируема во всех точках, включая узлы. Множество всех сплайнов порядка n образует векторное пространство S_n. Например, при $n = 0$ пространство S_0 состоит из кусочно-постоянных функций с возможными разрывами в целых числах. Функция Хаара $\varphi_0(x)$ (характеристическая функция промежутка $[0,1)$) и ее сдвиги образуют базис для S_0. Поэтому функцию Хаара $\varphi_0(x)$ называют *базисным сплайном* порядка нуль, или B-сплайном, где B – обозначает, что это базисная функция. B-сплайн $\varphi_1(x)$ порядка 1 с носителем на промежутке $[0, 2]$ можно записать в виде свертки $\varphi_0(x)$ с собой

$$\varphi_1(x) = \int_0^1 \varphi_0(x-t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t)\varphi_0(x-t)\,dt = \varphi_0 * \varphi_0(x).$$

B-сплайны высших порядков определяются индуктивно. Если определен B-сплайн $\varphi_n(x)$, то B-сплайн порядка $n+1$ определяется сверткой $\varphi_{n+1} = \varphi_n * \varphi_0$. B-сплайн $\varphi_n(x)$ порядка n имеет носитель на промежутке $[0, n+1]$, график $\varphi_n(x)$ симметричен относительно точки $(n+1)/2$. Для функции Хаара имеем преобразование Фурье

$$\hat{\varphi}_0(\omega) = e^{-i\omega/2}\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}$$

и для любого n получаем

$$\hat{\varphi}_n(\omega) = e^{-i(n+1)\omega/2}\left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right)^{n+1}.$$

В дальнейшем удобнее сдвинуть носитель B-сплайна $\varphi_n(x)$: будем считать, что для $\varphi_n(x)$ при нечетном n носитель находится на промежутке $[-(n+1)/2, (n+1)/2]$, а при четном – на промежутке $[-n/2, n/2+1]$. Тогда

$$\hat{\varphi}_n(\omega) = e^{-iK\omega/2}\left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right)^{n+1}, \tag{4}$$

где K=0 – при нечетном n и K=1 – при четном.

Теорема 1. *B-сплайны $\varphi_n(x)$ порядка n являются N-масштабирующими функциями для любого целого N>1. При этом правая часть масштабирующего соотношения*

$$\varphi(x)=\sqrt{N}\sum_k h_k\varphi(Nx-k)$$

является конечной суммой.

В случае нечетного n

$$h_k=\frac{1}{N^n\sqrt{N}}\sum_{\substack{|\alpha|=n+1\\ k}}\frac{(n+1)!}{\alpha_0!\alpha_1!\ldots\alpha_{N-1}!}\,, \quad (5)$$

$k =$

$$=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+(N-1)\alpha_{N-1}-(N-1)(n+1)/2,$$

$\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1})$ – *мультииндекс,*

$|\alpha|=\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{N-1}$ – *порядок мультииндекса , k меняется от* $-(N-1)(n+1)/2$ *до* $(N-1)(n+1)/2$.

В случае четного n

$$h_k=\frac{1}{N^n\sqrt{N}}\sum_{\substack{|\alpha|=n+1\\ k}}\frac{(n+1)!}{\alpha_0!\alpha_1!\ldots\alpha_{N-1}!}\,, \quad (6)$$

$k =$

$$=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+(N-1)\alpha_{N-1}-(N-1)n/2,$$

k меняется от $-(N-1)n/2$ *до* $(N-1)n/2+1$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай нечетного n. Тогда носитель $\varphi_n(x)$ находится на промежутке $[-(n+1)/2, (n+1)/2]$ и преобразование Фурье имеет вид (4), где K=0. Подставим (4) в масштабирующее соотношение и выразим частотную функцию $H_N(\omega)$:

$$H_N(\omega)=\frac{\hat{\varphi}_n(N\omega)}{\hat{\varphi}_n(\omega)}=\left(\frac{\sin(N\frac{\omega}{2})}{N\frac{\omega}{2}}\right)^{n+1}\left(\frac{\omega/2}{\sin\frac{\omega}{2}}\right)^{n+1}=$$

$$=\left(\frac{1}{N}\frac{\sin(N\frac{\omega}{2})}{\sin\frac{\omega}{2}}\right)^{n+1}=\left(\frac{1}{N}\frac{e^{iN\frac{\omega}{2}}-e^{-iN\frac{\omega}{2}}}{e^{i\frac{\omega}{2}}-e^{-i\frac{\omega}{2}}}\right)^{n+1}=$$

$$=\left(\frac{1}{N}e^{i(N-1)\frac{\omega}{2}}\right)^{n+1}\left(\frac{1-e^{-iN\omega}}{1-e^{-i\omega}}\right)^{n+1}=$$

$$=\frac{1}{N^{n+1}}e^{i\omega\frac{(N-1)(n+1)}{2}}\left(\sum_{k=0}^{N-1}e^{-i\cdot k\omega}\right)^{n+1}.$$

Таким образом, мы получаем представление частотной функции в виде

$$H_N(\omega)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k h_k\,e^{-i\,k\,\omega}.$$

Коэффициенты этого разложения, взятые с учетом $\sqrt{N}$, дают нам требуемые коэффициенты h_k масштабирующего соотношения. При этом суммирование производится по k от $-(N-1)(n+1)/2$ до $(N-1)(n+1)/2$.

Используя известный аналог формулы бинома Ньютона

$$(z_0+z_1+\cdots+z_p)^m=$$

$$=\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha_0!\ldots\alpha_p!}z_0^{\alpha_0}\cdots z_p^{\alpha_p},$$

получаем

$$h_k=\frac{1}{N^n\sqrt{N}}\sum_{\substack{|\alpha|=n+1\\ k}}\frac{(n+1)!}{\alpha_0!\alpha_1!\ldots\alpha_{N-1}!}\;;$$

$k =$

$$=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+(N-1)\alpha_{N-1}-\frac{(N-1)(n+1)}{2}.$$

В случае четного n доказательство теоремы проводится аналогично.

Пример. Рассмотрим B-сплайн

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+1)^2, & x\in[-1,0]\\ \frac{3}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2, & x\in[0,1]\\ \frac{1}{2}(x-2)^2, & x\in[1,2]\\ 0, & x\notin[-1,2]\end{cases}.$$

Для любого $N\geq 2$ масштабирующее соотношение (3) в частотной области принимает вид :

$$e^{-i\omega/2}\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\omega/2}\right)^3=$$

$$e^{-i(N-1)\frac{\omega}{2N}}H_N\left(\frac{\omega}{N}\right)e^{-i\frac{\omega}{2N}}\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2N}}{\frac{\omega}{2N}}\right)^3.$$

Отсюда частотная функция:

$$H_N(\omega)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_n\,e^{-i\,n\,\omega}=$$

$$=e^{-i\frac{(N-1)\omega}{2}}\left(\frac{1}{N}\frac{\sin\frac{N\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right)^3.$$

Учитывая, что при N=3

$$H_3(\omega)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{9\sqrt{3}}\left(\begin{array}{l}e^{i2\omega}+3e^{i\omega}+6+7e^{-i\omega}+\\ +6e^{-i2\omega}+3e^{-i3\omega}+e^{-i4\omega}\end{array}\right),$$

согласно (6), можно найти коэффициенты h_n масштабирующего фильтра

$$h_{-2}=h_4=\frac{1}{9\sqrt{3}},\quad h_{-1}=h_3=\frac{1}{3\sqrt{3}},$$

$$h_0=h_2=\frac{2}{3\sqrt{3}},\quad h_1=\frac{7}{9\sqrt{3}}.$$

Масштабирующее соотношение имеет вид:

$$\varphi_2(x)=\frac{1}{9}\varphi_2(3x+2)+\frac{1}{3}\varphi_2(3x+1)+$$

$$+\frac{2}{3}\varphi_2(3x)+\frac{7}{9}\varphi_2(3x-1)+\frac{2}{3}\varphi_2(3x-2)+$$

$$+\frac{1}{3}\varphi_2(3x-3)+\frac{1}{9}\varphi_2(3x-4).$$

Приведем еще один пример N-масштабирования для любого целого $N>1$, отличный от B-сплайновых функций.

Теорема 2. *Функция* $\varphi(x)=\dfrac{\sin\pi x}{\pi x}$ *является N-масштабирующей функцией для любого целого $N>1$. Масштабирующее соотношение для данной функции имеет вид:*

$$\varphi(x)=\sum_{n\in Z}\varphi(n/N)\frac{\sin\pi(Nx-n)}{\pi(Nx-n)}=$$

$$=\sqrt{N}\sum_{n\in Z}h_n\frac{\sin\pi(Nx-n)}{\pi(Nx-n)},$$

где

$$h_n=\frac{1}{\sqrt{N}}\varphi\left(\frac{n}{N}\right)=\frac{\sqrt{N}}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right).$$

Доказательство. Напомним, что функция $f(x)\in L^2(\mathbf{R})$ называется функцией с ограниченной шириной полосы [1], если ее преобразование Фурье $\hat{f}(\omega)$ равно нулю вне некоторой полосы частот $[-\Omega,\Omega]$.

Преобразование Фурье для

$$\varphi(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi x}$$

с носителем на промежутке $[-\pi,\pi]$ имеет вид:

$$\hat{\varphi}(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in[-\pi,\pi]\\ 0, & \omega\notin[-\pi,\pi]\end{cases}$$

Можно считать, что носитель лежит на промежутке (большем) $[-\pi N,\pi N]$. По теореме Котельникова, функция с ограниченной шириной полосы $[-\Omega,\Omega]$ может быть представлена в виде

$$f(x)=\sum_{n\in Z}f\left(\frac{\pi}{\Omega}n\right)\frac{\sin(\Omega x-\pi n)}{\Omega x-\pi n}.$$

Для нашей функции, если $\Omega=\pi N$,

$$\varphi(x)=\sum_{n\in Z}\varphi\left(\frac{n}{N}\right)\frac{\sin\pi(Nx-n)}{\pi(Nx-n)}=$$

$$=\sqrt{N}\sum_{n\in Z}h_n\varphi(Nx-n).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Добеши И*. Десять лекций по вейвлетам. - М.; Ижевск: РХД, 2001, 494 с.

Автор статьи:

Подкур
Полина Николаевна
- ст. преп. каф.высшей и прикладной математики Кемеровского института-филиала РГТЭУ