

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

**УДК 531.8:621.8**

**В.А Гоголин, М.Т. Кобылянский, В.Ф. Горбунов, Д.М Кобылянский**

## ГЕОМЕТРИЯ И КИНЕМАТИКА ТЕЛ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО РОЛИКАМ

При конструировании механизмов, узлы которых имеют ограниченное число степеней свободы при наличии роликовых связей, возникает вопрос о влиянии геометрических параметров узлов и кинематических характеристик движения на их возможную конструкционную форму. К таким механизмам, в частности, относятся вибраторы, совмещающие колебания с вращением. В работах [1, 2] установлена принципиальная возможность создания конструкций таких вибраторов, и показано разнообразие форм тел, совмещающих колебания с вращением по роликам. В данной работе рассматривается влияние конструктивных и кинематических параметров указанных выше вибраторов на их форму, а также анализируются поля скоростей и ускорений таких механизмов.

1. Рассмотрим влияние радиуса роликов  $r$ , амплитуды  $a$  и частоты колебаний  $m$  на возможные формы тел при их вращении по роликам. Здесь, также как и в работах [1, 2], величины, имеющие размерность длины  $a$  и  $r$  выражены в относительных единицах радиуса  $R$  окружности, проходящей через центры трех роликов. Ролики расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной  $R\sqrt{3}$ . Тело вращается относительно своего центра, который в начальный момент совпадает с центром окружности, и совершает гармонические колебания, уравнения которых в системе координат, связанной с телом, имеют вид:

$$f(\tau) = a \cdot \sin(m\tau), \quad g(\tau) = 0 \quad (1)$$

для горизонтальных и  
 $f(\tau) = 0, \quad g(\tau) = a \cdot \sin(m\tau) \quad (2)$

для вертикальных колебаний.

В соответствии с методикой определения формы тел, совмещающих вращение с колебаниями при движении по роликам, изложенной в [2], были проведены численные эксперименты с различными радиусами роликов при гармонических режимах колебаний (1) и (2) с частотой  $m=3$ . Форма тел определялась параметрическим урав-

нением, полученным в [2]

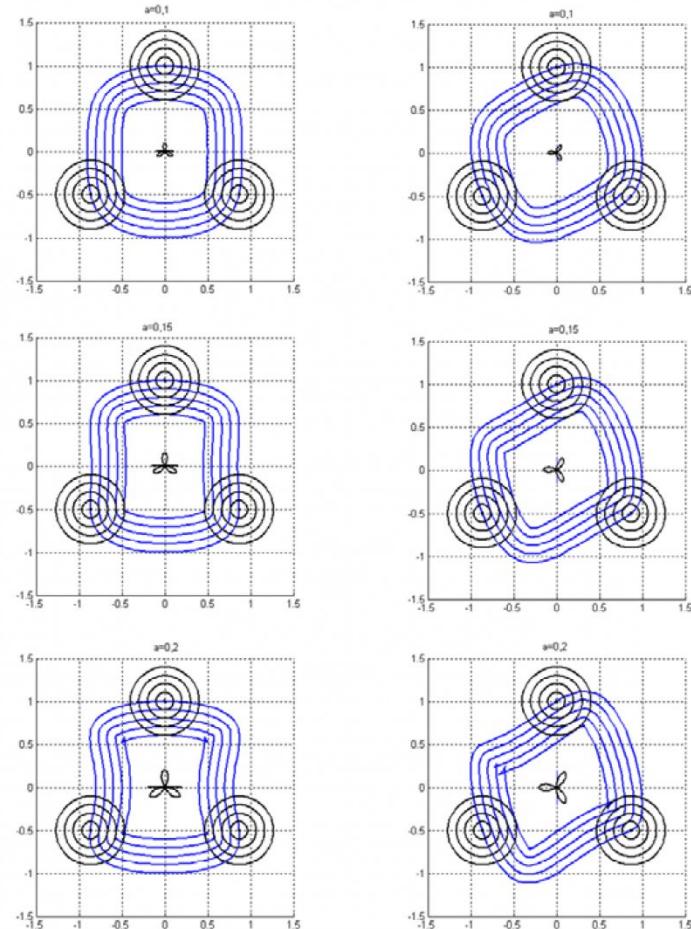
$$\begin{cases} x_1 = R \sin \tau + f(\tau) \pm \\ \quad \pm \frac{R \sin \tau - g'(\tau)}{W}, \\ y_1 = R \cos \tau + g(\tau) \pm \\ \quad \pm \frac{R \cos \tau + f'(\tau)}{W}, \end{cases} \quad (3)$$

$$W = \sqrt{[R \sin \tau - g'(\tau)]^2 + [R \cos \tau + f'(\tau)]^2}$$

где  $\tau$  - параметр уравнения.

На рис.1 показаны формы тел для различных радиусов

$$f=0; \quad g=a \cdot \sin 3\tau$$



*Рис.1. Формы тел при движении по роликам разных радиусов с частотой колебания  $m=3$*

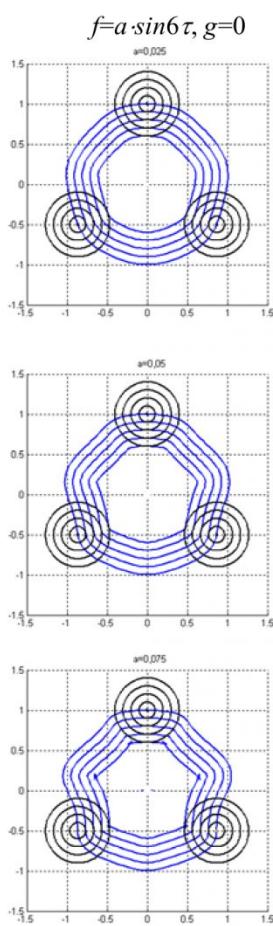


Рис.2. Формы тел при движении по роликам разных радиусов с частотой колебания  $m=6$

роликов  $r=0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$  для частоты колебаний  $m=3$ . Из рисунка следует, что размер радиуса роликов не оказывает влияние на форму тела. Для случая гармонических колебаний с амплитудой  $a=0,1$  овальная форма тела сохраняется. При большем значении амплитуды колебаний, при  $a=0,2$  на контуре тела появляются узловые точки, что, естественно, не допустимо для конструкций механизмов. Тот же рисунок показывает, что при значениях амплитуды колебаний  $a<0,15$  сохраняется овальная форма тела, а при больших значениях овальный контур тела переходит в замкнутую кривую с вогнутыми участками. Аналогичные качественные результаты получены при  $m=6$  (рис.2). В этом случае овальная форма те-

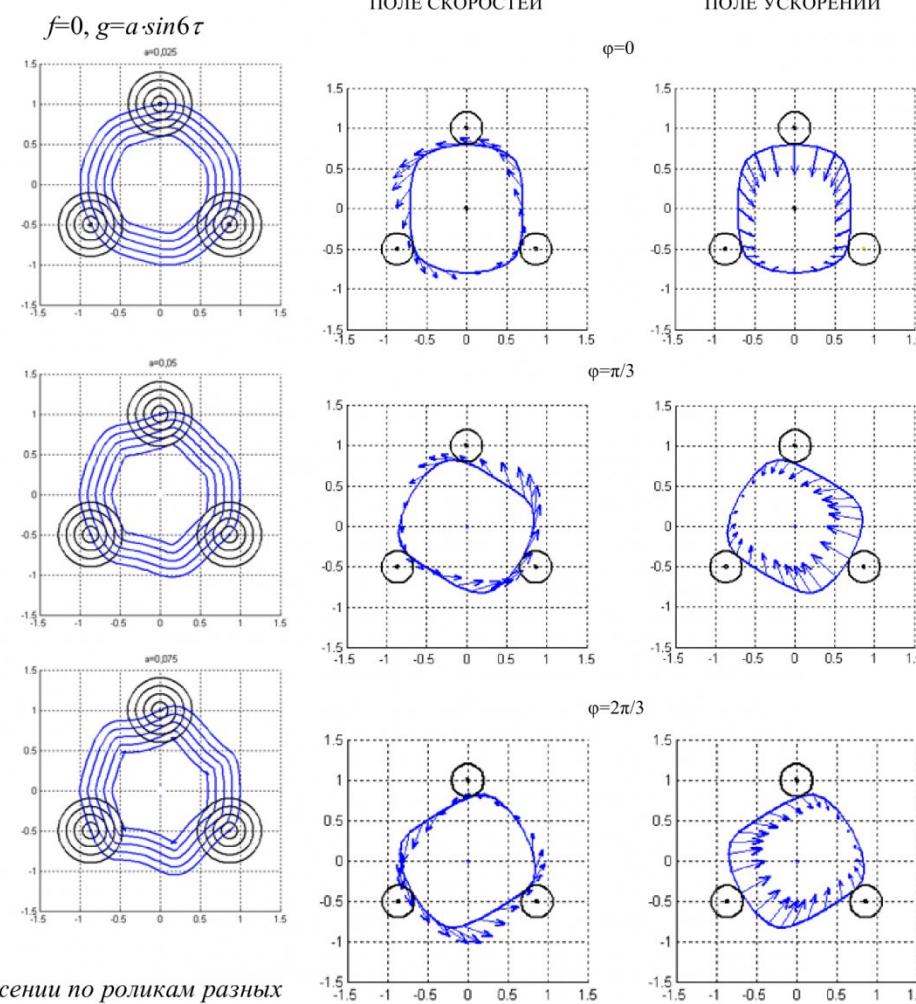


Рис.3. Поля скоростей и ускорений контура тела при различных углах поворота

ла сохраняется при значениях амплитуды  $a<0,05$ . Поэтому, далее была проведена серия численных расчетов для установления соответствия между частотой и наибольшей амплитудой колебаний, при которой еще сохраняется овальная форма тела. Для частот 3, 6, 9, 12, 15 наибольшие значения амплитуд составили 0,15; 0,05; 0,025; 0,01; 0,005. По этим данным получена регрессионная степенная зависимость наибольшей амплитуды от частоты вида

$$a = 1,74 \cdot m^{-2,07}, \quad (4)$$

с коэффициентом детерминации 0,97.

Данное уравнение можно заменить с погрешностью 12 ÷ 25% в диапазоне частот колебаний  $m=3 \div 15$  на зависимость  $a = \sqrt{3} / m^2$ , где амплитуда вы-

ражается в единицах радиуса окружности  $R$ . Если амплитуда  $a_1$  выражается в единицах расстояния между центрами роликов  $R\sqrt{3}$ , то (4) можно представить в виде  $a_1 = 3 / m^2$ .

2. Кинематический анализ тел, совершающих колебания совместно с вращением по трем роликам, сводился к рассмотрению поля скоростей и ускорений тел при различных значениях размеров роликов, амплитуды и частоты колебаний. Параметрическое уравнение траектории произвольной точки тела с начальными координатами  $(x_1; y_1)$  задавалось в форме [2]:

$$\begin{cases} x = [x_1 - f(\phi)] \cos \phi - \\ \quad - [y_1 - g(\phi)] \sin \phi, \\ y = [x_1 - f(\phi)] \sin \phi + \\ \quad + [y_1 - g(\phi)] \cos \phi, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\varphi$  есть угол поворота тела относительно центра вращения.

Далее рассматривалось равномерное вращение тела  $\varphi = wt$  с угловой скоростью  $w$ , где  $t$  – время. На рис.3 показаны поля скоростей и ускорений точек контура тела, координаты которых определяются по (3) при  $w=1$  (получены с использованием MATLAB). Разработанная программа рассчитывает значения компонент скорости и ускорения любой точки тела при произвольном законе вращения и произвольном, согласованном с вращением, законе колебания центра вращения.

Для случая гармонических горизонтальных (1) или вертикальных колебаний (2) уравнения компонент скоростей и ускорений точек тела при равномерном вращении  $\varphi = wt$  несложно получить аналитически. Так, при гармонических горизонтальных колебаниях тела (1) уравнения для перемещений точки тела с начальными координатами  $(x_1; y_1)$  из (5):

$$\begin{cases} x = [x_1 - a \sin(mwt)] \cdot \\ \quad \cos wt - y_1 \sin wt, \\ y = [x_1 - a \sin(mwt)] \cdot \\ \quad \sin wt + y_1 \cos wt. \end{cases} \quad (6)$$

После одно- и двукратного дифференцирования (6) по  $t$  получим выражения для поиска компонент скоростей  $V_x$ ,  $V_y$  и ускорений  $A_x$ ,  $A_y$

$$\begin{cases} V_x = -wx_1 \sin wt - wy_1 \cos wt \\ \quad - a(\beta \cos \beta t + \alpha \cos \alpha t)/2, \\ V_y = wx_1 \cos wt - wy_1 \sin wt \\ \quad + a(\beta \sin \beta t - \alpha \sin \alpha t)/2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_x = -w^2 x_1 \cos wt + w^2 y_1 \sin wt + \\ a(\beta^2 \sin \beta t + \alpha^2 \sin \alpha t)/2, \\ A_y = -w^2 x_1 \sin wt - w^2 y_1 \cos wt + \\ a(\beta^2 \cos \beta t - \alpha^2 \cos \alpha t)/2; \end{cases} \quad (7)$$

где  $\alpha = (m+1)w$ ,  $\beta = (m-1)w$ .

Для кинематического анализа движения вибратора представляют интерес значения модулей скорости и ускорения. Из (7) модуль скорости

$$\begin{aligned} V = & \{ w^2(x_1^2 + y_1^2) + a^2[\alpha^2 + \\ & + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos(\alpha + \beta)t]/4 + \\ & + aw[x_1\beta \sin(wt + \beta t) + \\ & + x_1\alpha \sin(wt - \alpha t) + \\ & + y_1\beta \cos(wt + \beta t) \\ & + y_1\alpha \cos(wt - \alpha t)] \}^{1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Модуль ускорения находится из (8) и имеет вид:

$$\begin{aligned} A = & \{ w^4(x_1^2 + y_1^2) + a^2[\alpha^4 + \\ & + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 \cos(\alpha + \beta)t]/4 + \\ & + w^2a[x_1\beta^2 \sin(wt + \beta t) - \\ & - x_1\alpha^2 \sin(wt - \alpha t) + \\ & + y_1\beta^2 \cos(wt + \beta t) - \\ & - y_1\alpha^2 \cos(wt - \alpha t)] \}^{1/2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Выражения (9) и (10) существенно упрощаются для точки тела, совпадающей с центром вращения, то есть при  $x_1=y_1=0$ :

$$\begin{aligned} V = & a[\alpha^2 + \beta^2 + \\ & + 2\alpha\beta \cos(\alpha + \beta)t]^{1/2}/2, \\ A = & a[\alpha^4 + \beta^4 - \\ & - 2\alpha^2\beta^2 \cos(\alpha + \beta)t]^{1/2}/2. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) следует, что макси-

мальное значение модуля скорости центра вращения достигается при условии  $\cos(\alpha + \beta)t = 1$ , то есть при  $(\alpha + \beta)t = 2\pi k$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Учитывая из (8), что  $\alpha + \beta = 2wm$ , найдем максимальное значение модуля скорости. Оно составляет  $V_{max} = a \cdot m \cdot w$  в моменты времени  $t = \pi k / 2wm$ . Максимальное значение модуля ускорения центра вращения достигается при выполнении условия  $\cos(\alpha + \beta)t = -1$ , и равняется  $A_{max} = aw^2(m^2 + 1)$  в моменты времени  $t = (2k + 1)\pi / 2wm$ . Так, например, при частоте вращения тела 90 оборотов в минуту угловая скорость  $w = 3\pi$  сек $^{-1}$ . При частоте колебаний  $m = 3$  и абсолютном значении амплитуды колебаний  $a = 0,01$  м максимальные значения модулей скорости и ускорения центра вращения тела составят  $V_{max} = 0,3$  м/сек,  $A_{max} = 10$  м/сек $^2$ . Таким образом, полученные выражения для модулей скорости и ускорения центра вращения тела (11) позволяют проводить динамический анализ вибраторов.

Авторы выражают благодарность к.т.н., доценту В.Н. Ермаку за полезные консультации при выполнении данной работы, а также работ [1, 2].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобылянский Д.М. Совместимость вращения и колебаний тел с одной степенью свободы / Д.М. Кобылянский, В.Ф. Горбунов, В.А. Гоголин // Вестн. КузГТУ, 2006.– №1.– С. 26-28.
2. Гоголин В.А., Кобылянский М.Т., Горбунов В.Ф., Кобылянский Д.М. Движение тел по роликам / В.А. Гоголин, М.Т. Кобылянский, В.Ф. Горбунов, Д.М. Кобылянский // Вестн. КузГТУ, 2006.– №3.– С.3-6.

□ Авторы статьи:

Гоголин  
Вячеслав Анатольевич  
– докт. техн. наук, проф.,  
зав. каф. прикладной ма-  
тематики

Кобылянский  
Михаил Трофимович  
– докт. техн. наук, проф.,  
зав. каф. начертательной  
геометрии и графики

Горбунов  
Валерий Федорович  
– докт. техн. наук, проф.  
каф. стационарных и  
транспортных машин

Кобылянский  
Дмитрий Михайлович  
– аспирант каф. стацио-  
нарных и транспортных  
 машин