

УДК 532.529.5

Д.Ю. Палеев

## ОШИБКИ, ДОПУСКАЕМЫЕ В ЗАПИСИ ДВУЧЛЕННОГО ЗАКОНА ФИЛЬТРАЦИИ

Фильтрационное движение метановоздушной смеси в выработанных пространствах угольных шахт относится к пространственному типу течений и поэтому при строгом подходе должно описываться системой трёхмерных уравнений газовой динамики с соответствующими граничными условиями, учитывающими довольно сложную структуру и конфигурацию зоны обрушения. Первоначально задачи фильтрации газа в выработанном пространстве решались на основе эмпирических соотношений [1], а затем, с расширением возможностей вычислительной техники, - в одно-, двух- и трёхмерных постановках [2-7]. Фильтрационные задачи такого класса очень сложны в численной реализации, требуют разработки специальных алгоритмов расчёта и больших затрат машинного времени. По этой причине большинство численных решений задач фильтрации в зонах обрушения получено на основе более простых двухмерных постановок. В качестве связи между скоростью фильтрации и давлением использовались в основном законы Дарси, степенной и двучленный. Однако часть работ, использующих двучленный закон фильтрации [8], выполнено без строгого обоснования перехода от пространственного типа течения к плоскому.

Корректная запись двучленного закона фильтрации, являющегося одновременно уравнением движения в пористой среде, может быть представлена в следующем виде [9]:

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = - \left[ \frac{\mu}{k} u_i + \frac{\rho}{l} |U| u_i \right] \quad (1)$$

где  $P$  – давление газа;  $\rho$  – плотность газа;  $u_i$  - проекция вектора скорости на ось  $x_i$ ;

$\mathbf{U} = u_i \mathbf{i} + u_j \mathbf{j} + u_k \mathbf{k}$  - вектор фильтрационной скорости газа;  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости газа;  $k$  - коэффициент проницаемости пород;  $l$  - коэффициент макрошероховатости.

При малых скоростях фильтрации двучленный закон вырождается в закон Дарси. С ростом скорости возрастает роль квадратичного члена, который характеризует турбулентный режим фильтрации. Промежуточный режим движения аппроксимируется зависимостью (1), то есть полагают, что он является комбинацией ламинарного и турбулентного режимов фильтрации. Причём в области действия закона Дарси свойства пористой среды отражаются в коэффициенте проницаемости  $k$ , имеющем размерность квадрата длины. В области же действия квадратичного закона сопротивления свойства среды учитываются другим коэффициентом –  $l$ , имеющим размерность длины. В переходной области пористая среда характеризуется двумя коэффициентами  $k$  и  $l$ . Двучленный закон фильтрации является наиболее приемлемым для описания фильтрации газа в выработанном пространстве, так как он автоматически учитывает перераспределение сил в потоке.

В литературе встречаются формы записи двучленного закона фильтрации, не эквивалентные виду (1), а именно [4, 10, 11]:

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = - \left[ \frac{\mu}{k} u_i + \frac{\rho}{l} u_i^2 \right] \quad (2)$$

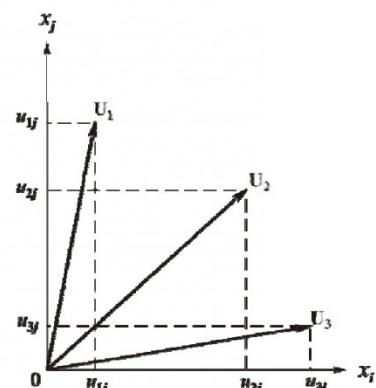
и [5]

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = - \left[ \frac{\mu}{k} u_i + \frac{\rho}{l} u_i^2 \cdot \operatorname{sgn}(u_i) \right] \quad (3)$$

Формы записи (2) и (3) также являются неэквивалентными между собой.

В работе [6] была проанализирована корректность соотношений (1)-(3) на выполнение условия инвариантности для вектора силы и вектора скорости относительно преобразования координат. Проверка показала, что соотношение (1) представляет собой физически корректное аналитическое выражение закона фильтрации. В то же время в соотношениях (2) и (3) нарушено условие инвариантности. Более того, соотношение (2) не имеет физического смысла, т.к. в нём суммируются векторная и скалярная величины.

Ошибочность аналитических выражений закона фильтрации (2)-(3) можно показать на примере простого анализа. Так, соотношения (1)-(3) будут давать совпадающие результаты только при расчёте ламинарного режима фильтрации из-за несущественного влияния квадратичных членов. Расхождения в результатах начинаются в промежуточном режиме, когда роль квадратичных членов начинает возрастать, и эти расхождения будут усиливаться при переходе в турбулентный режим фильтрации. Причём, величина расхождения зависит от ориента-



Направления векторов  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{U}_2$ ,  $\mathbf{U}_3$  в декартовой системе координат:  $u_{1i}$ ,  $u_{1j}, \dots, u_{3i}$ ,  $u_{3j}$  – проекции векторов на координатные оси

ции вектора скорости фильтрационного течения относительно выбранной системы координат. Из рисунка видно, что для вектора  $\mathbf{U}_1$  произведение  $|\mathbf{U}_1|u_{1i}$  из соотношения (1) будет много больше, чем  $u_{1i}^2$  из соотношений (2) и (3). В то же время для соотношений (1)-(3), записанных для оси  $x_j$ , расхождения будут не так значительны. Для вектора  $\mathbf{U}_2$  ошибки при использовании соотношений (2) и (3) будут одинаково распределяться по осям  $x_i$  и  $x_j$ . Для вектора  $\mathbf{U}_3$  расхождения в результатах будут максимальными для оси  $x_j$ . Расхождения исчезают, если вектор скорости будет направлен вдоль одной из осей координат.

Расхождения в результатах для соотношения (2) в турбулентном режиме становятся ещё более значительными, если составляющая вектора скорости имеет отрицательное значение. В этом случае второе слагаемое в (2) всегда больше нуля, т.е. правая часть соотношения (2) всегда будет отрицательна, в то время как правая часть соотношения (1) всегда положительна. В результате силы сопротивления, действующие на фильтрационное течение, в соотношениях (1) и (2) в этой ситуации всегда будут направлены в противоположные стороны. А это означает, что поле течения, рассчитанное с использованием соотношения (2), не только количественно, но и качественно отличается от поля течения, описываемого соотношением (1).

Действительно, знак правой части в соотношении (2), вне зависимости от направления вектора скорости, всегда отрицателен, поэтому изменение давления вдоль любой координатной оси всегда будет иметь одну и ту же направленность – в сторону уменьшения. В этом случае соотношение (2) в качестве результата выдаёт только однодirectionalные картины течения. В результате соотношение (2) неправильно отражает

физику протекающего процесса из-за неспособности описывать сложные фильтрационные поля с циркуляционными и возвратными токами. Что касается соотношения (3), то для устранения отмеченного недостатка его второе слагаемое специально было подкорректировано путём введения знаковой функции.

Несмотря на грубое искашение фильтрационного поля, двучленные законы фильтрации (2) и (3) из-за простой численной реализации продолжают оставаться привлекательным для некоторых исследователей и использоваться ими в довольно серьёзных приложениях [11, 12]. В этих работах предлагается строить в выработанном пространстве двухмерную прямоугольную сетку, рёбра которой образуют фиктивные ветви, а вершины – соответствующие узлы. Причём, ветви представляются как некий аналог выработки (элемент вентиляционной сети), к которой применим двучленный закон (2), записанный в виде

$$H = rQ + RQ^2, \quad (4)$$

где  $h$  – депрессия;  $Q$  – расход в ветви;  $r, R$  – аэродинамическое сопротивление ветви при ламинарном и турбулентном режимах движения.

В результате, формируется задача о расчете воздухораспределения в некоторой кодированной вентиляционной сети, совпадающей по конфигурации с сеточной областью, которая покрывает все выработанное пространство. Это позволяет объединить действующие горные выработки и фиктивные ветви выработанного пространства в единую вентиляционную сеть шахты, для расчёта которой применимы хорошо апробированные итерационные методы расчёта.

Однако такой подход, основанный на использовании соотношения (2)-(4), по причинам изложенным выше, некорректен. Здесь газ вынужден двигаться в пористой среде выработанного пространства вдоль

фиктивных выработок, подчиняясь фактически одномерным уравнениям вида (2)-(4), полученным без строгого математического обоснования. Они выведены не путём перехода от трёхмерной записи уравнений фильтрации к двухмерной, как это показано в работе [13], а путём записи одномерных уравнений фильтрации вдоль осей координат, в которых модуль вектора скорости

$$|\mathbf{U}| = \sqrt{u_i^2 + u_j^2} \quad (5)$$

отсутствует. Действительно, для одномерного случая второе слагаемое правой части уравнения (1) сильно упрощается:

$$\frac{\rho}{l} |\mathbf{U}| \cdot u = \frac{\rho}{l} \sqrt{u^2} \cdot u = \frac{\rho}{l} u^2.$$

И если затем от одномерной записи уравнения фильтрации обратно переходить к двух- или трёхмерной, то модуль вектора фильтрационной скорости в новых уравнениях появиться уже не может. Между тем присутствие модуля вектора скорости в уравнениях фильтрации принципиально. Через него, благодаря проекциям на оси координат  $u_i, u_j, u_k$ , осуществляется внутренняя связь между уравнениями движения (1). В результате, обеспечивается выполнение закона сохранения количества движения в элементарной струйке тока, в виде автоматического перераспределения энергии по осям координат, которое нормируется соотношением (5). В уравнениях Навье-Стокса связь такого рода осуществляется через конвективные и диффузионные члены.

Таким образом, применение уравнений (2)-(4) для решения пространственных задач фильтрации некорректно, т.к. используются математически независимые одномерные уравнения, записанные вдоль соответствующих осей координат. Между тем современное развитие вычислительной техники позволяет использовать корректную математическую запись двучленного закона фильтрации (1) и получать на его основе физиче-

ски правильные поля фильтрации газа в обрушенной среде выработанного пространства.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Милетич А.Ф.* Утечки воздуха и их расчёт при проветривании шахт. - М.: Недра, 1968. - 146 с.
2. *Клебанов Ф.С.* Аэродинамическое управление газовым режимом в шахтных вентиляционных сетях. – М.: Наука, 1974. – 136 с.
3. *Фельдман Л.П.* Исследование нестационарного движения газовой смеси в выработанном пространстве участка численными методами // Разработка месторождений полезных ископаемых. – Киев: Техника, 1974. Вып. 36. – С. 137-143.
4. *Маевская В.М., Бонецкий В.А., Поликаров А.Г.* Распределение давления и скорости воздуха в выработанном пространстве // Вентиляция шахт и предупреждение эндогенных пожаров: сб. науч. тр. ВостНИИ. Т. 26. – Кемерово, 1975. – С. 28-39.
5. *Бонецкий В.А., Богатырёв В.Д., Садохин В.П.* Оценка фильтрационных прососов воздуха при выборе схем проветривания // Вентиляция шахт и предупреждение эндогенных пожаров: сб. науч. тр. ВостНИИ. Т. 26. – Кемерово, 1975. – С. 39-47.
6. *Палеев Д.Ю., Брабандер О.П.* Математическое моделирование активного воздействия на взрывоопасные области и очаги горения в угольных шахтах. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999. - 202 с.
7. Исследование газодинамики метано-воздушной смеси в пористых средах / И.М. Васенин, А.А. Глазунов, П.А. Глазунов, М.М. Пучков // Изв. вузов. Физика. 2004. № 10. С. 26-30.
8. Рудничная вентиляция: Справочник / Н.Ф. Гращенков, А.Э. Петросян, М.А. Фролов и др.; Под ред. К.З. Ушакова. - М.: Недра, 1988. – 440 с.
9. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в пористых средах. - М.: Недра, 1984. - 208 с.
10. *Минский Е.М.* Элементы статистического исследования фильтрационных движений // Труды ВНГНИИ. 1958. Вып. 2 (10). - С. 3-25.
11. Методика расчета и обоснования параметров проветривания и отработки участков, обеспечивающих эндогенную пожаробезопасность в течение всего периода их отработки / Караганда, 1998. – 12 с.
12. *Беляев В.И., Федорович А.П., Скрицкий В.А.* Аэrogазодинамическая модель расширенной сети выемочного участка // Борьба с авариями в шахтах: сб. науч. тр. РосНИИГД. Вып. 16. – Кемерово, 2003. – С. 96-105.
13. *Брабандер О.П., Палеев Д.Ю.* Обоснование перехода к двумерной модели фильтрации газа в выработанном пространстве // Борьба с подземными пожарами: сб. статей. Вып. 13. - Кемерово, 1992. – С. 22-26.

Автор статьи:

Палеев  
Дмитрий Юрьевич  
- докт. техн. наук, вед. научн. сотр. Ин-  
ститута угля и углехимии СО РАН