

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УДК 531.8:621.8

В.А.Гоголин, М.Т.Кобылянский, В.Ф.Горбунов, Д.М.Кобылянский

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ ПО РОЛИКАМ

В различных типах конструкций механизмов используются ролики, позволяющие управлять движением механизма в соответствии с требуемой кинематической схемой. К таким типам механизмов относятся, например, кулачковые механизмы [1]. При конструировании таких механизмов с роликами может возникнуть следующая задача: разработать механизм, совмещающий вращение и колебание одной из его деталей в заданной плоскости, если поступательные перемещения его движущейся части ограничены как минимум тремя роликами. В известной нам литературе задача в такой постановке не рассматривалась. При числе роликов меньше 3 или их специальном расположении, например в ряд, эта задача допускает множество очевидных решений.

1. Расчетная схема рассматриваемой задачи с тремя роликами показана на рис.1. Здесь плоское тело T должно совершать вращение при условии ограничения движения тремя роликами. Центры роликов расположены в вершинах правиль-

ного треугольника ABC (рис. 1a). Ролики могут свободно вращаться относительно своих центров A, B, C или быть неподвижными, допуская перемещение тела T по касательной в точке их контакта. Перемещение же тела по нормали в точке касания в любом случае запрещены. Данная задача имеет элементарное решение: тело T – круг, центр которого совпадает с центром треугольника ABC и является центром вращения. Требуется найти другие формы тела T , которые позволяли бы ему непрерывно обкатываться по трем роликам. Задачу можно переформулировать в другой форме – найти замкнутую кривую отличную от окружности, касающуюся трех заданных, регулярно расположенных окружностей одного радиуса и сохраняющую контакт с ними при любом повороте искомой кривой.

Введем систему координат XOY , связанную с треугольником ABC , так, чтобы начало координат совпало с центром треугольника, а координатные оси были расположены так, как показано на рис.1a. Пусть рас-

стояние от начала координат до центров роликов есть R , а радиусы роликов – r . Тогда центры роликов будут иметь следующие координаты:

$$A(0; R), B(R\sqrt{3}/2; -R/2), \\ C(-R\sqrt{3}/2; -R/2).$$

В любом положении тела T оно имеет не более одной степени свободы и может совершать вращение относительно некоторого центра только тогда, когда нормали к ее границе в точках контакта с роликами будут пересекаться в одной точке. Эта точка и будет являться мгновенным центром вращения тела. Если мгновенный центр вращения не изменяет своего положения при повороте тела, то единственной возможной формой тела будет круг радиуса $(R-r)$ с центром в начале координат O .

Для отыскания других форм тела рассмотрим движение треугольника ABC вместе с роликами относительно неподвижной системы координат $X_1O_1Y_1$, связанной с телом, как показано на рис.1б. Тогда, если движение треугольника с роликами происходит так, чтобы ролики сохраняли непрерывный контакт с телом при их повороте на любой угол, то и обратно – тело будет совершать требуемое движение по роликам. Опишем движение одного из роликов, например, ролика с центром в точке A (каждый ролик в дальнейшем будем именовать той же буквой, которой обозначены их центры). Зададим движение жесткого целого треугольника ABC и ролика A , как поворот относительно центра O на угол t

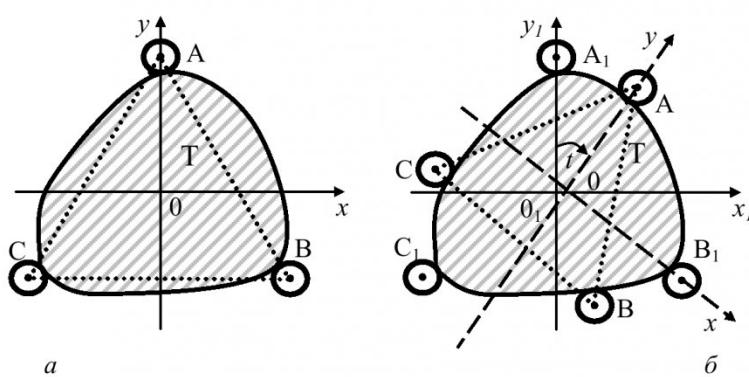


Рис.1. Расчетная схема

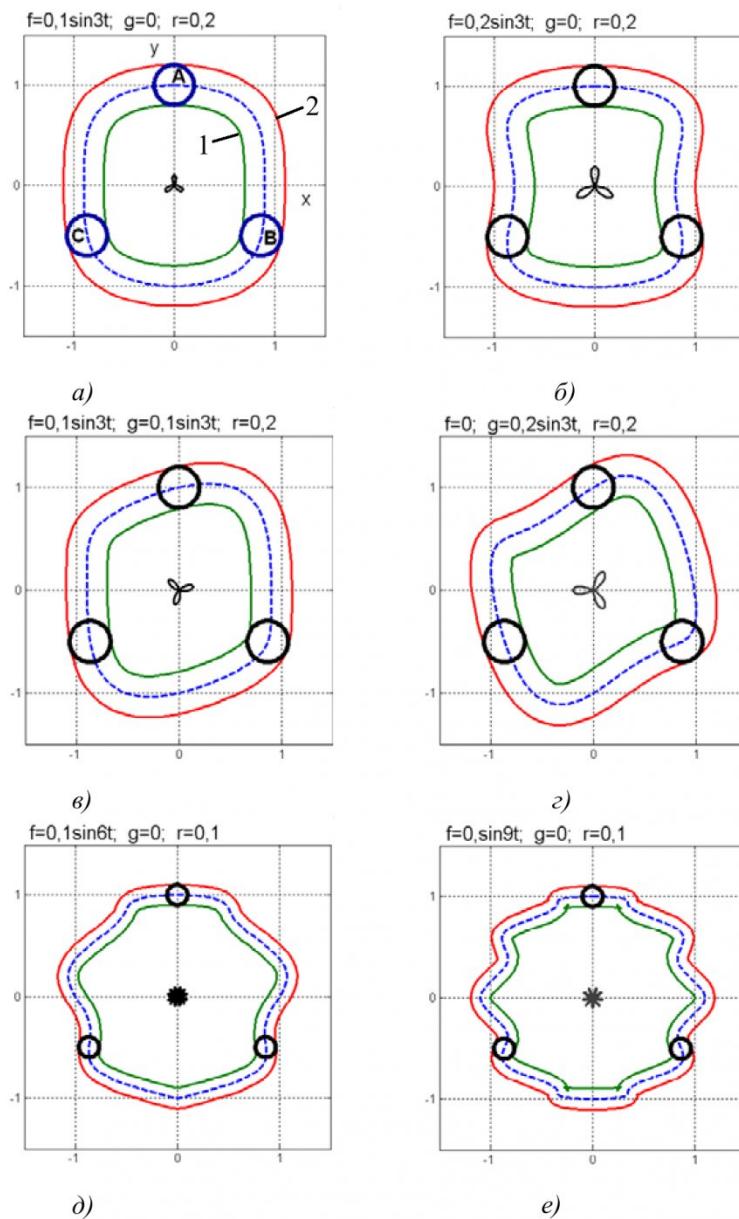


Рис.2. Формы тел и траектории их центров вращения

относительно вертикальной оси по часовой стрелке и перемещение по оси O_1X_1 на $f(t)$ и по оси O_1Y_1 на $g(t)$. Тем самым перемещение ролика А и треугольника АВС будет согласовано с их поворотом. Тогда параметрическое уравнение центра ролика А при сложении этих движений в системе координат $X_1O_1Y_1$ будет иметь вид:

$$x_0 = R \sin t + f(t), \quad (1)$$

$$y_0 = R \cos t + g(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

В своем движении ролик А будет занимать различные положения, так что если найти огибающую к границе ролика,

то она будет являться линией, по которой перемещается этот ролик. В общем случае уравнение огибающей к семейству кривых $F(x,y,t)=0$ определяется системой уравнений [2]

$$\begin{cases} F(x,y,t)=0, \\ F'_t(x,y,t)=0. \end{cases} \quad (2)$$

В рассматриваемом случае мы имеем семейство окружностей радиуса r с центрами, координаты которых задаются выражением (1). Поэтому, система (2) после небольших упрощений второго уравнения из (1) и ввода обозначений

$$\begin{aligned} x_1 - R \sin t - f(t) &= p; \\ y_1 - R \cos t - g(t) &= q; \\ R \cos t + f'(t) &= u; \\ R \sin t - g'(t) &= v. \end{aligned} \quad (3)$$

запишется в виде:

$$\begin{cases} p^2 + q^2 - r^2 = 0, \\ p \cdot u - q \cdot v = 0. \end{cases}$$

Решения этой системы имеют вид:

$$\begin{cases} p = \pm \frac{r \cdot v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \\ q = \pm \frac{r \cdot u}{\sqrt{u^2 + v^2}}. \end{cases} \quad (4)$$

Из (4) с учетом (3) окончательно получаем следующее параметрическое уравнение огибающей линии в системе координат $X_1O_1Y_1$

$$\begin{cases} x_1 = R \sin t + f(t) \pm \\ \pm r \cdot \frac{R \sin t - g'(t)}{\sqrt{[R \sin t - g'(t)]^2 + [R \cos t + f'(t)]^2}}, \\ y_1 = R \cos t + g(t) \pm \\ \pm r \cdot \frac{R \cos t + f'(t)}{\sqrt{[R \sin t - g'(t)]^2 + [R \cos t + f'(t)]^2}}. \end{cases} \quad (5)$$

Уравнение (5) описывает две огибающие линии: со знаком плюс – внешнюю огибающую роликов, со знаком минус – внутреннюю огибающую. При $r=0$ уравнение (5) существенно упрощается и описывает граничные кривые тела для случая роликов нулевого размера [3], то есть точек, и имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= R \sin t + f(t), \\ y_1 &= R \cos t + g(t). \end{aligned}$$

Чтобы огибающие кривые общего уравнения (5) были границами тела, необходимо выполнение следующих условий. При повороте треугольника на угол $2\pi/3$ ролик А должен совпасть с роликом В, а при повороте треугольника на угол $4\pi/3$ ролик А должен перейти уже на

место ролика С. Остальные ролики соответственно должны занимать места следующих за ними по часовой стрелке. Даные требования накладывают ограничения на значения функций, описывающих перемещения центра треугольника:

$$\begin{cases} f(0) = f(2\pi/3) = \\ \quad = f(4\pi/3) = 0, \\ g(0) = g(2\pi/3) = \\ \quad = g(4\pi/3) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Требованиям (6) удовлетворяют, например, все функции вида:

$$H(t) = h_0 + \sum_{m=1}^N \left[h_{1m}(t) \cdot \sin(3mt) + h_{2m}(t) \cdot \cos(3mt) \right]. \quad (7)$$

При этом должно выполняться условие :

$$h_0 = - \sum_{m=1}^N h_{2m}(0).$$

Функции вида (7) описывают широкий класс кривых, в частности, таких как циклоиды и трохоиды, даже в случае постоянных множителей у синусов и косинусов. При переменных множителях достаточно потребовать их непрерывной дифференцируемости, чтобы иметь функции f, g перемещений центра вращения, соответствующие механическому смыслу задачи.

На рис.2 показаны примеры тел (огибающих кривых) для различных видов перемещений центра треугольника, которые описываются гармоническими колебаниями (здесь и далее все размеры в относительных единицах радиуса $R=1$). Кривая 1 показывает внутреннюю огибающую кривую, кривая 2 соответствует внешней огибающей или телу, совершающему те же движения с внешним касанием роликов. Пунктирная кривая описывает предельный случай – границу тела для роликов нулевого радиуса или, другими словами, траекторию центров роликов при их обкатывании как единого целого по внешней 2

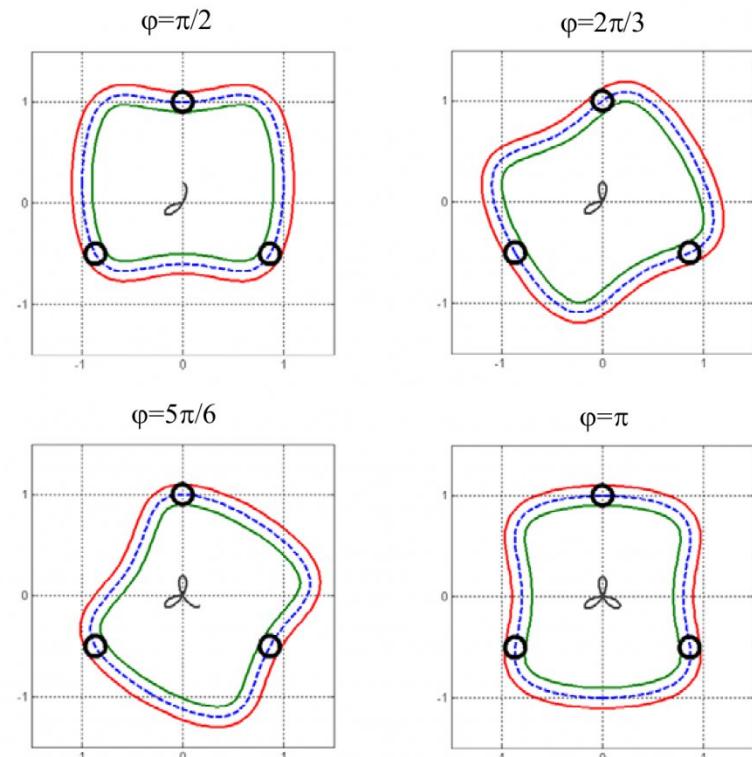


Рис.3. Этапы движения тела по роликам

или внутренней огибающей 1. В центре каждого из отдельных рисунков показаны траектории центров вращения тел. Об определении этих траекторий будет сказано ниже.

Эти примеры иллюстрируют зависимость формы тела от направления колебаний по координатным осям: по оси OX (рис.2а,б,д,е), по оси OY (рис.2г) и по обеим осям (рис.2в). Причем, переход от горизонтальных колебаний к вертикальным приводит к потере симметрии тела. На форму тела оказывают влияние также амплитуда и частота колебаний. При увеличении амплитуды колебаний по оси OX с 0,1 до 0,2 тело становится овальной формы (рис.2а) и приобретает форму с выпуклыми и вогнутыми частями (рис.2б). С увеличением частоты колебаний, заданной множителем угла поворота t , число участков выпуклости и вогнутости тела возрастает (рис.2д,е). При большой частоте колебаний на границе внутреннего тела могут появляться узловые точки (рис.2д). Оставшимся параметром, определяющим форму тела,

является радиус роликов, влияние которого видно по рис.2.

2. Перейдем из системы координат, связанной с телом $X_1O_1Y_1$, в систему координат XOY, связанную с треугольником ABC (рис.1), и тем самым опишем движение тела по роликам. Для этого переместим тело по координатным осям на $-f(\varphi)$ по горизонтали, на $-g(\varphi)$ по вертикали и повернем тело на угол φ против часовой стрелки относительно вертикальной оси. В результате получим уравнения граничных кривых внутреннего и внешнего тела в системе координат xOy :

$$\begin{cases} x = [x_1 - f(\varphi)] \cos \varphi - \\ \quad - [y_1 - g(\varphi)] \sin \varphi, \\ y = [x_1 - f(\varphi)] \sin \varphi + \\ \quad + [y_1 - g(\varphi)] \cos \varphi, \end{cases} \quad (7)$$

где x_1, y_1 находятся из (5).

Уравнение (7) позволяет описать траекторию любой точки по ее заданным полярным координатам R, t . Для описания траектории мгновенного центра вращения тела в (7) нужно положить $R=0=t$, что приводит к

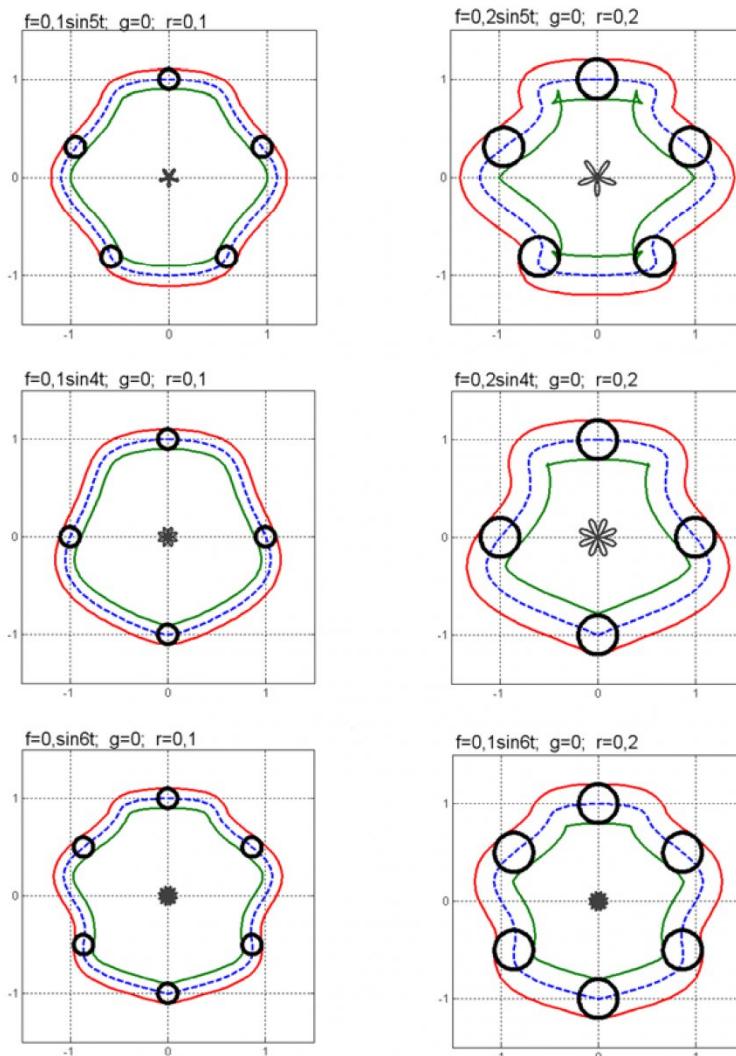


Рис.4. Формы тел, обеспечивающие их движение по четырем, пятью и шестью роликам

параметрическому уравнению этой траектории:

$$\begin{cases} x = -f(\varphi) \cos \varphi + g(\varphi) \sin \varphi, \\ y = -f(\varphi) \sin \varphi - g(\varphi) \cos \varphi. \end{cases} \quad (8)$$

На рис.3 показано положение внутреннего и внешнего тел при движении по роликам (рис.2б). В центре каждого от-

дельного рисунка приведена часть траектории мгновенного центра вращения тел (8) при их повороте на указанный угол φ . Этот рисунок иллюстрирует возможность совмещения вращения тел и их колебаний при движении по роликам. Следует отметить, что другой возможности передвижения тел по трем

роликам равного радиуса с центрами в вершинах равностороннего треугольника не существует, так как тело в любом положении должно иметь одну степень свободы для вращения вокруг мгновенного центра. При этом положение мгновенного центра вращения должно быть согласовано с поворотом тела, как это сделано выше в (5, 7, 8).

3. Рассмотренная задача обобщается на произвольное число n роликов центрами, совпадающими с вершинами правильного n -угольника. Повторяя вышесказанное для этого случая, приходим к тем же параметрическим уравнениям (5, 7, 8) с заменой (6) условиями

$$f(2k\pi/n) = g(2k\pi/n) = 0, \quad k=0, \dots, n-1 \quad (9)$$

Достаточно широкий класс функций, удовлетворяющих (9), в этом случае вместо (7) даст

$$H(t) = h_0 + \sum_{m=1}^N [h_{1m}(t) \cdot \sin(nmt) + h_{2m}(t) \cdot \cos(nmt)]. \quad (10)$$

На рис.4 показаны варианты тел с внешним и внутренним касанием роликов. Форма этих тел позволяет осуществлять их движение по роликам, совмещая вращение и колебания тел. Здесь рассмотрена одна из простейших функций вида (10), описывающая гармонические колебания мгновенного центра по горизонтали. Использование других, более сложных функций типа (10) не вызывает затруднений, и проверено в разработанной авторами программе в пакете MATLAB.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артоболевский И.И. Механизмы в современной технике.– М.: Наука, 1970.– т.2.– 637с.
2. Ращевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.: Гос.изд-во техн.-теор. лит., 1956.– 420с.
3. Кобылянский Д.М. Совместимость вращения и колебаний тел с одной степенью свободы /Д.М. Кобылянский, В.Ф. Горбунов, В.А. Гоголин // Вестн. КузГТУ, 2006, №3, С.26-28.

□ Авторы статьи:

Гоголин
Вячеслав Анатольевич
– докт. техн. наук, проф.
каф. прикладной математики

Кобылянский
Михаил Трофимович
– докт. техн. наук, проф.,
зав. каф. начертательной
геометрии и графики

Горбунов
Валерий Федорович
– докт. техн. наук, проф.
каф. стационарных и
транспортных машин

Кобылянский
Дмитрий Михайлович
– аспирант каф. стационарных и транспортных машин